Teoremas de Pappus-Guldin

Los teoremas de Pappus-Guldin proporcionan una herramienta para el cálculo de áreas y volúmenes de superficie y cuerpos de revolución en torno a un eje (o recta). Para poder aplicar este teorema, la figura no debe cortar al eje de rotación.

También se pueden emplear estos teoremas para determinar la posición del centroide de una curva o área plana.

1. Definiciones elementales

Definición 1. Una superficie de revolución se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo.

Definición 2. Un cuerpo de revolución se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo.

2. Teoremas

Teorema 1. El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.

Demostración:

Sea una línea curva de longitud L que rota alrededor del eje X y considérese un elemento *dL* de dicha curva. El área *dA* generada por el elemento *dL* es igual a

$$dA = 2\pi y\, dL$$

Donde y es la distancia del elemento *dL* al eje X. Por lo tanto el área total generada por L es

$$\boldsymbol{A = \int 2\pi y\, dL = 2\pi\, y\, L}\ ;$$

donde $2\pi y$ es la distancia recorrida por el centroide de L.

Teorema 2. El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.

Demostración:

Sea un área A, la cual rota con respecto al eje X, y considérese un elemento dA de dicha área. El volumen dV generado por el elemento dA es igual a

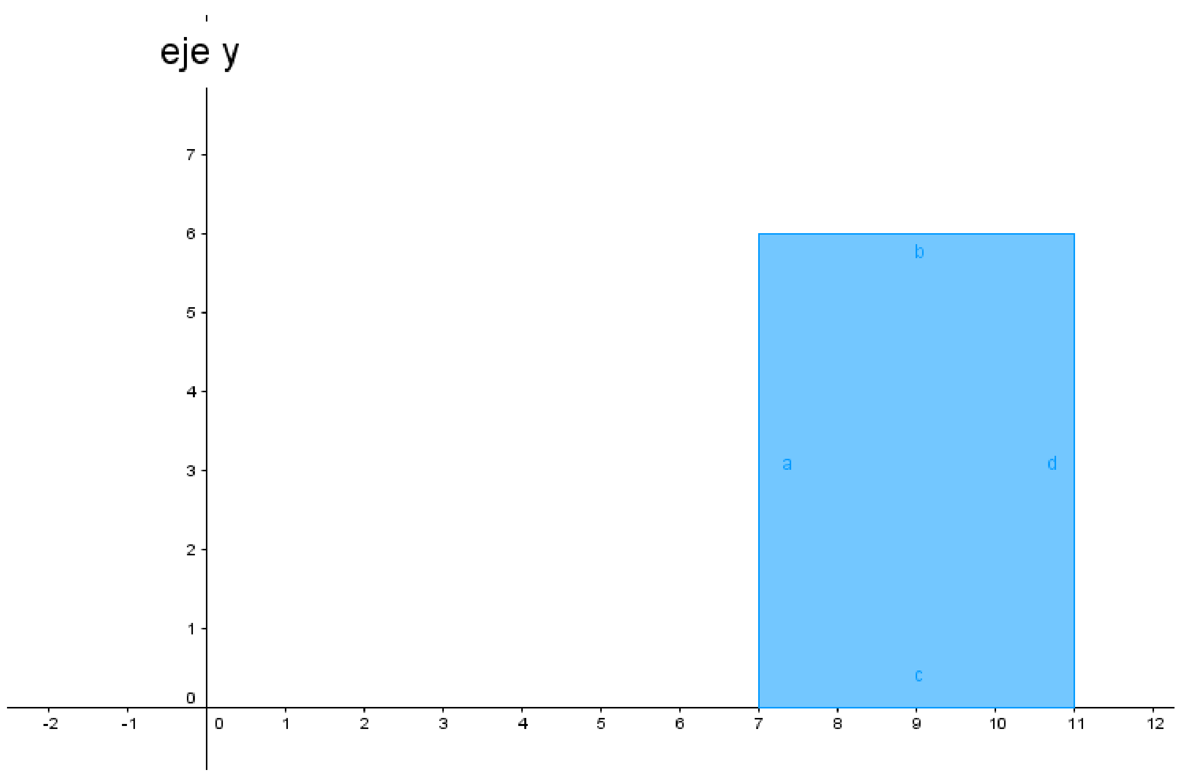
$$dV = 2\pi y\, dA$$

Donde y es la distancia del elemento dA al eje de X (eje de rotación). Por lo tanto, el volumen generado por A es

$$\boldsymbol{V = \int 2\pi y\, dA = \ 2\pi\ y\ A}\ ;$$

donde $2\pi y$ es la distancia recorrida por el centroide de A.

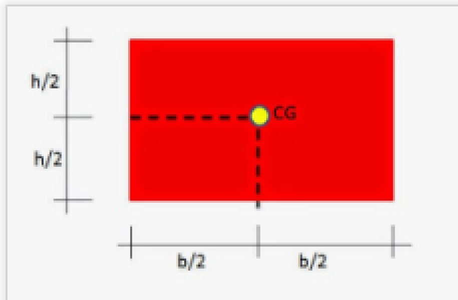
Ejemplo.- Calcular el volumen generado al rotar un rectángulo de lados 6 y 4 metros, en torno al eje Y, tal como indica la figura.



Para aplicar el teorema de Pappus-Guldin debemos identificar el área de la región, y la distancia del centroide de la figura al eje de rotación.

Sabemos que el área de la región plana (rectángulo) será 4·6 = 24 m^2.

Por otra parte, ubicamos el centroide según nos indica la siguiente figura:



En nuestra figura, b corresponde a 4m y h corresponde a 6 m, aplicando los datos en la forma que se nos indica la distancia del centroide al eje Y será:

$$(\frac{b}{2} + distancia\ del\ eje\ al\ borde\ de\ rectangulo)$$

$$= \left(\frac{4}{2} + 7\right)$$

$$= 9\ m.$$

Ahora que tenemos todos los datos necesarios podemos aplicar el teorema de Pappus-Guldin para calcular el volumen:

$$V = 2\pi \cdot y \cdot A = 2\pi \cdot 9 \cdot 24 = 432\ \pi\ m^3$$