3 Matrizengleichungen

Didaktische Hinweise

Die folgende Station stellt Arbeitsblätter zum Lösen einfacher Matrizengleichungen vor. Dabei besteht die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler darin, das Lösen einer Matrizengleichung gemäß einer detaillierten Beschreibung durchzuführen. In einem zweiten Schritt geht es darum, eine gegebene Lösung zu verbalisieren. Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, unter welchen Bedingungen eine Gleichung lösbar ist.

Die Schülerinnen und Schüler …

… wenden erlaubte Rechenoperationen zum Lösen von Matrizengleichungen an.

… verwenden anstelle der Division die Multiplikation mit der inversen Matrix.

… beachten die Reihenfolge, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

… erkennen, dass nicht jede Gleichung lösbar ist.

…

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Matrix X, so dass gilt: $A \cdot X - B = 3 \cdot X$

Idee:

Ähnlich wie in der Algebra mit Zahlen, kann man **unter bestimmten Voraussetzungen** Gleichungen, die Produkte von Matrizen enthalten, nach einer unbekannten Matrix X auflösen.

Durchführung:	$A \cdot X - B = 3 \cdot X$
Sortieren: alles mit X auf eine Seite, alles ohne X auf die andere Seite:	$A \cdot X - 3 \cdot X = B$
Durch Multiplikation mit der Einheitsmatrix E wird aus der Zahl 3 eine nxn-Matrix:	$A \cdot X - 3 \cdot E \cdot X = B$
Da die Matrix X sowohl rechts von A als auch rechts von E steht, kann sie nach rechts ausgeklammert werden:	$(A - 3 \cdot E) \cdot X = B$
Statt einer Division wird nun auf beiden Seiten von **links die Inverse** multipliziert:	$\underbrace{(A - 3 \cdot E)^{-1} \cdot (A - 3 \cdot E)}_{E} \cdot X = (A - 3 \cdot E)^{-1} \cdot B$
Damit ist die Gleichung nach X aufgelöst. Einsetzen der Werte: Vereinfachen	$X = (A - 3 \cdot E)^{-1} \cdot B$ $X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
Berechnen der Inversen:	$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
Lösung:	$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Fazit: Die Gleichung kann gelöst werden, weil X ausgeklammert werden kann und weil die Inverse existiert.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$ aus $A\cdot\vec{x} - \vec{b} = \vec{x}$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Idee:

Man führt E als Hilfsmatrix ein und klammert dann den Vektor $\vec{x}$ aus.

Lösung:
Bei dieser Lösung sind die einzelnen Schritte bereits ausgeführt, und Sie sollen dazu einen Kommentar wie bei der vorigen Aufgabe schreiben.

Durchführung:

$A\cdot\vec{x} - \vec{b} = \vec{x}$	
$A\cdot\vec{x} - \vec{x} = \vec{b}$	Sortieren: alles mit X auf eine Seite, alles ohne X auf die andere Seite:
$A\cdot\vec{x} - E\cdot\vec{x} = \vec{b}$	E als Hilfsmatrix einführen, damit man $\vec{x}$ Ausklammern kann
$(A - E)\cdot\vec{x} = \vec{b}$	$\vec{x}$ rechts ausklammern
$(A - E)^{-1}\cdot(A - E)\cdot\vec{x} = (A - E)^{-1}\cdot \vec{b}$	Mit der Inversen von links multiplizieren
$\vec{x} = (A - E)^{-1}\cdot \vec{b}$	Gleichung aufgelöst
$\vec{x} = \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	Zahlenwerte einsetzen
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$	Inverse berechnen und Ergebnis formulieren

Aufgabe 3

a) Gegeben sind die Matrizen A, B, C, D und der Vektor $\vec{b}$ mit

$$A= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ D= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix X bzw. den Vektor.

(1) $X \cdot A + C = X \cdot B$

(2) $B \cdot X \cdot A = C + D$

(3) $D \cdot X + (A \cdot B)^{-1} = 3 \cdot X$

(4) $3 \cdot \vec{x} = C \cdot \vec{x} + \vec{b}$

b) Prüfen Sie, ob man die folgenden Gleichungen lösen kann.

(1) $X \cdot A + B = 3 \cdot X$

(2) $X \cdot A + X \cdot 3 = E$

(3) $3 \cdot \vec{x} + C \cdot \vec{x} = B$