

Ergänzende Aufgaben¹ zur Planarbeit Zyklische Matrizen

Aufgabe 1

Ein Käferweibchen (einer bestimmten Art) legt 25 Eier und stirbt bald danach. Nach einem Jahr haben sich ein Viertel der Eier zu Larven entwickelt. Nach einem weiteren Jahr werden ein Fünftel der Larven zu Käfern, die ein Jahr später wieder Eier legen. Die Startpopulation besteht aus 1000 Eiern, 150 Larven und 100 Käferweibchen.

- (a) Stellen Sie die Entwicklung des weiblichen Käferbestandes für die folgenden 9 Jahre grafisch dar.
- (b) Ermitteln Sie eine Funktion, die die langfristige Entwicklung des weiblichen Käferbestandes aussagekräftig beschreibt.
- (c) Können durch äußere Einflüsse die Übergangsraten zwischen den einzelnen Stadien so beeinflusst werden, dass es zu einer periodischen Populationsentwicklung kommt?

Aufgabe 2

Bei einer Säugetierart können die jährlichen Änderungen in einer aus drei Alterstufen A_1 , A_2 und A_3 bestehenden Population durch die folgende Übergangsmatrix beschrieben werden:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a, b \text{ Überlebensraten, } c \text{ Vermehrungsrate, } c > 0 \\ 0 < a, b \leq 1 \end{array}$$

- a) Bestimmen Sie a , b und c so, dass sich die Population mit der Startverteilung von 1000 Tieren in A_1 , 500 Tieren in A_2 und 100 Tieren in A_3 nach zwei Jahren reproduziert.
- b) Gibt es Werte a , b und c , so dass sich eine beliebige Startverteilung nach jeweils drei Jahren um 20% vergrößert?

Aufgabe 3

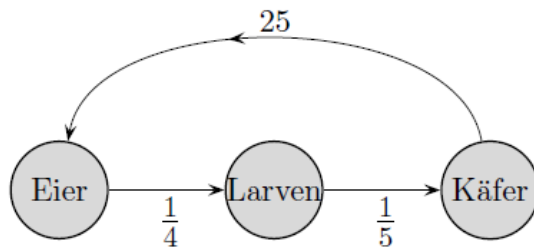
Die Entwicklung einer Insektenpopulation verlaufe in vier Stufen:

Eier, Larven 1, Larven 2 und Insekten. Eine Entwicklungsstufe dauert eine Woche und es gilt:

- 50% der Eier werden zu Larven 1
- 20% der Larven 1 werden zu Larven 2
- 25% der Larven 2 werden zu Insekten
- Jedes Insekt legt 50 Eier

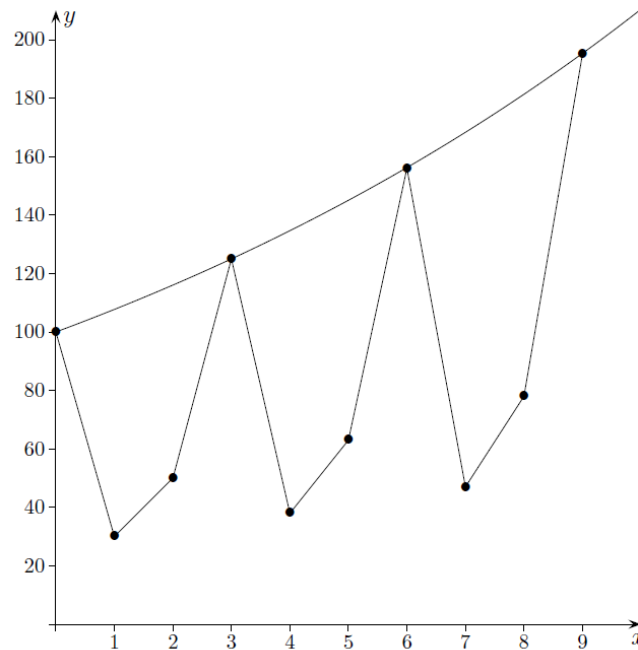
- a) Zeichnen Sie das entsprechende Übergangendiagramm und geben Sie die Übergangsmatrix an, die diesen Prozess beschreibt.
- b) Gegeben sei eine Population, die jeweils 1000 Eier, 1000 Larven 1, 1000 Larven 2 und 1000 Insekten enthält. Wie hat sich diese Population nach zwei Wochen verändert?
- c) Beurteilen Sie, wie sich die Zahl der Insekten langfristig entwickelt.
- d) Wie viele Eier müsste ein Insekt legen, damit die Insektenpopulation auf lange Sicht begrenzt bleibt und nicht ausstirbt?
- e) Nehmen Sie an, 50% aller in einer aktuellen Woche lebenden Insekten würden eine weitere Woche leben und auch in dieser wieder 50 Eier legen. Wie verändern sich das Übergangendiagramm, die Leslie-Matrix und die Antwort auf die Fragestellung unter b)?

¹ Günter Roofls <http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Vektorpdf2/Populationsentwicklung2.pdf>, Zugriff: 05.07.2015
3 Ergänzende Aufgaben_Kl.doc

Lösungen zu den Aufgaben**Lösung zu Aufgabe 1**

Übergangsmatrix

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$



(b)

$$f(x) = 100 \cdot 1,25^{\frac{x}{3}}$$

Der Faktor $1,25 = 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ (siehe Exponentialfunktionen) beschreibt das exponentielle 3-Jahres-Käfer-Wachstum und kann direkt dem Diagramm entnommen werden.

Der Exponent $\frac{x}{3}$ berücksichtigt den 3-Jahres-Zyklus.

(a)

$$\mathcal{L}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^6 = (abc)^2 \mathcal{E}, \quad \text{usw.}$$

Die Parameter sind so zu wählen, dass $abc = 1$ gilt. Wenn sich z.B. auch nur ein Fünftel der Eier zu Larven entwickeln, dann ist $abc = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 25 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Bedingung:

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^2 \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 \Rightarrow

$$1000 = 500bc$$

$$500 = 100ac$$

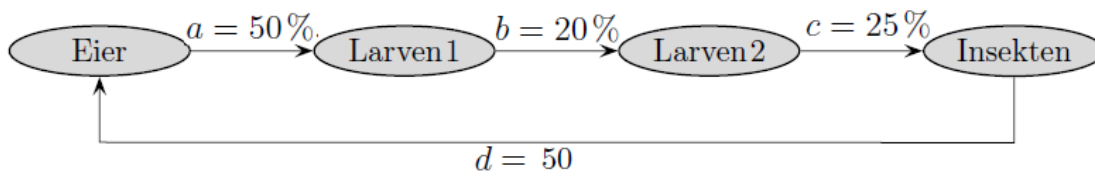
$$\underline{100 = 1000ab}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{5}, c = 10$$

b) Bedingung: $abc = 1,2$ z. B. $a = 0,5; b = 0,8; c = 3$

Lösung zu Aufgabe 3

(a)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 12500 \\ 25000 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

(c)

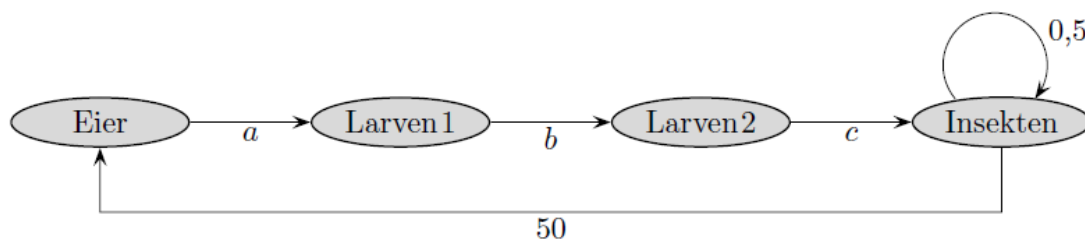
$$A^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 50 \mathcal{E} = 1,25 \mathcal{E}$$

Die Zahl der Insekten wird demnach langfristig wachsen.

(d)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 1, \quad x = 40$$

(e)



$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 37500 \\ 25000 \\ 100 \\ 425 \end{pmatrix}$$