Ergänzende Aufgaben zur Planarbeit Stochastische Matrizen

Aufgabe 1

Das Kaufverhalten bei den Lesern der drei marktbeherrschenden Illustrierten sei durch die folgende Tabelle gegeben.

T	I_1	I_2	I_3
I_1	0,8	0,2	0,2
I_2	0,1	0,7	0,2
I_3	0,1	0,1	0,6

Die momentanen Marktanteile der Illustrierten I_1, I_2 und I_3 sind 40%, 20% und 40%.

(a) Berechnen Sie den jeweiligen Marktanteil der Illustrierten I_1, I_2 und I_3 nach einem und nach zwei Jahren.
(b) Bestimmen Sie den Stabilitätsvektor.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Übergangsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

die das Übergangsverhalten von Käufern zweier Marken beschreibt. Der jeweilige Marktanteil der zwei beteiligten Firmen sei gegeben durch den Verteilungsvektor $\vec{x}_0$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, .\vec{x}_4$ und $\vec{x}_5$ in den drei folgenden Fällen:

Fall 1: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$ Fall 2: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}$ Fall 3: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie die Ergebnisse.

(b) Berechnen Sie den Stabilitätsvektor $\vec{x}$.

Aufgabe 3

Zwei Firmen A und B teilen sich den Markt eines Produktes auf. Der Marktanteil von A ist 10%, der Marktanteil von B ist 90%. Für das Wechselverhalten der Käufer des Produktes gelte die folgende Übergangsmatrix (nicht reguläre stochastische Matrix).

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie das Wechselverhalten der Käufer des Produktes in einem Diagramm dar und interpretieren Sie. Beantworten Sie die folgende Frage ohne Rechnung: Wie wird sich die Marktverteilung langfristig entwickeln?
(b) Berechnen Sie den Stabilitätsvektor.

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Wir berechnen $\vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0$ und $\vec{x}_2 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_1$:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 32+4+8 \\ 4+14+8 \\ 4+2+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}44 \\ 0{,}26 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_1 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \cdot \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 44 \\ 26 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{1000} \begin{pmatrix} 352+52+60 \\ 44+182+60 \\ 44+26+180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}464 \\ 0{,}286 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Die Marktanteile sind …

Marktanteile	I_1,	I_2	I_3
nach 1 Jahr	44%	26%	30%
nach 2 Jahren	46,4%	28,6%	25%

(b) Wir berechnen den Stabilitätsvektor $\vec{x}$ gemäß der Gleichung $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$. Für die Komponenten x_1, x_2 ,und x_3 von $\vec{x}$ gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

$$\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} - \mathbf{T} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Lösung des homogenen LGS $(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrcl} 0{,}2x_1 & -0{,}2x_2 & -0{,}2x_3 & = & 0 \\ -0{,}1x_1 & +0{,}3x_2 & -0{,}2x_3 & = & 0 \\ -0{,}1x_1 & 0{,}1x_1 & +0{,}4x_3 & = & 0 \end{array}$$

nach dem Gaußschen Algorithmus (beachte: Die Spaltensummen sind jeweils null, d.h. es wird eine Nullzeile erzeugt).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot 5 \\ | \cdot 10 \\ | \cdot 10 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir ersetzen die Nullzeile mit der Bedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&2&-3&0\\1&1&1&1\end{array}\right)|\cdot(-1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&2&-3&0\\0&2&2&1\end{array}\right)|\cdot(-1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&2&-3&0\\0&0&5&1\end{array}\right)|\cdot 0{,}6 \quad |\cdot 0{,}2 \quad |\cdot 0{,}2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0{,}2\\0&2&0&0{,}6\\0&0&1&0{,}2\end{array}\right)|\cdot 0{,}5 \;|\cdot 0{,}5 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0{,}5\\0&1&0&0{,}3\\0&0&1&0{,}2\end{array}\right)$$

Wir lesen ab: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0{,}3$,und $x_3 = 0{,}2$.

Probe:

$$\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}2&0{,}2\\0{,}1&0{,}7&0{,}2\\0{,}1&0{,}1&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}3\\0{,}2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8&2&2\\1&7&2\\1&1&6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}40+6+4\\5+21+4\\5+3+12\end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix}50\\30\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}3\\0{,}2\end{pmatrix}$$

Langfristig wird die Illustrierte I_1 50% der Marktanteile besitzen, die Illustrierte I_2 30% und die Illustrierte I_3 20%.

Lösung zu Aufgabe 2

Fall1

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}43\\0{,}57\end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_2=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}43\\0{,}57\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}529\\0{,}471\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_3=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}529\\0{,}471\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5587\\0{,}4413\end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_4=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5587\\0{,}4413\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}5676\\0{,}4297\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_5=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5676\\0{,}4297\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}5703\\0{,}4297\end{pmatrix}.;$$

Fall 2

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}75\\0{,}25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}625\\0{,}375\end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_2=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}625\\0{,}375\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5875\\0{,}4125\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_3=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5875\\0{,}4125\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}57625\\0{,}42375\end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_4=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}57625\\0{,}42375\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}5729\\0{,}4271\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_5=\begin{pmatrix}0{,}7&0{,}4\\0{,}3&0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5729\\0{,}4271\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}5719\\0{,}4281\end{pmatrix}.;$$

Fall 3

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,565 \\ 0,435 \end{pmatrix}$;

$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,565 \\ 0,435 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5695 \\ 0,4305 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5695 \\ 0,4305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,57085 \\ 0,42915 \end{pmatrix}$;

$\vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,57085 \\ 0,42915 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,5713 \\ 0,4287 \end{pmatrix}$.;

Interpretation
Unabhängig von der Anfangsverteilung haben die Komponenten von $\vec{x}_5$ in allen drei Fällen etwa dieselben Werte. Es ist zu vermuten, dass der Stabilitätsvektor nicht von der Anfangsverteilung abhängt, sondern nur von der Übergangsmatrix $\mathbf{T}$.

(b) Berechnung des Stabilitätsvektors

1. Möglichkeit

Es werden weitere Verteilungsvektoren $\vec{x}_6, \vec{x}_7, \vec{x}_8, \ldots$ berechnet, bis sich die Komponenten nicht mehr ändern. Hierzu wird die Matrix $\mathbf{T}$ und der Verteilungsvektor $\vec{x}_0$ in die Matrixvariablen [A] und [B] eingegeben. Die Folge von Verteilungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$ kann besonders schnell berechnet werden, wenn das Ergebnis der Multiplikation [A]*[B] wieder in [B] gespeichert wird.

Tastenfolge: [A]*[B] STO [B], ENTER, ENTER, …

Gleichgültig mit welchem der vorgegebenen Verteilungsvektor begonnen wird liefert der GTR

[[0.5714285714][0.4285714286]] und MATH/FRAC ergibt [[4/7][3/7]].

Der Stabilitätsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

2. Möglichkeit

Führt man bei der Rekursionsformel $\vec{x}_n = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_{n-1}$ den Grenzübergang für $n \to \infty$ durch, dann folgt die Gleichung $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ und für die Komponenten x_1 und x_2 von $\vec{x}$ gilt $x_1 + x_2 = 1$. $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ wird zum homogenen LGS $(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ umgeformt. Es ist

$$(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0,3 & -0,4 \\ -0,3 & 0,4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Addiert man die beiden Zeilen der Matrix $\mathbf{E} - \mathbf{T}$, dann ergibt sich

$$\mathbf{E}-\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. es gilt $3x_1 = 4x_2$ oder $x_2 = \frac{3}{4}x_1$; außerdem gilt $x_1 + x_2 = 1$ und damit

$$x_1 + \frac{3}{4}x_1 = 1 \Rightarrow \frac{7}{4}x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{7} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{7}$$

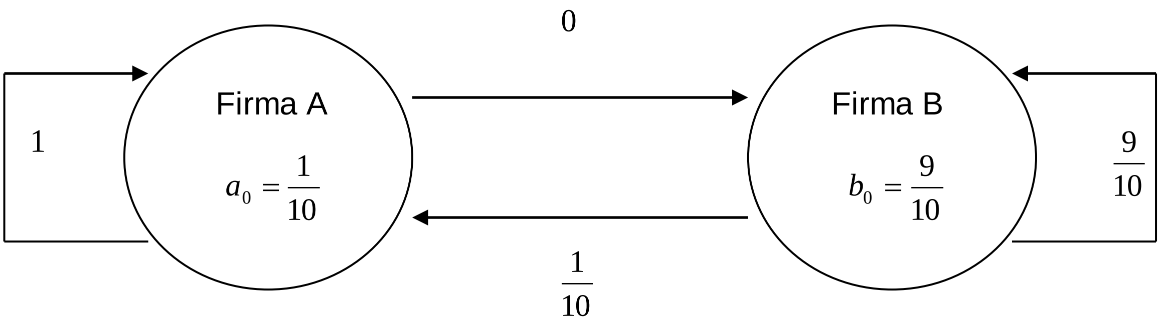
Der Stabilitätsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

Die Überlegungen in der Möglichkeit 2 bestätigen die Vermutung, denn die durch den Vektor $\vec{x}_0$ vorgegebene Anfangsverteilung geht an keiner Stelle in die Überlegung ein.

Für reguläre stochastische Matrizen $\mathbf{T}$ gilt allgemein: Der Stabilitätsvektor $\vec{x}$ hängt nur von der Übergangsmatrix $\mathbf{T}$ und nicht von de Anfangsverteilung $\vec{x}_0$ ab[1].

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Diagramm zum Wechselverhalten der Käufer



Interpretation
Die Käufer von Firma A bleiben 100 %ig bei Firma A. D.h. hat ein Kunde das Produkt von Firma A gekauft, dann kauft er es immer. Firma kann 90% ihrer Käufer überzeugen, wieder ihr Produkt zu kaufen. Aber 10% der B-Käufer wandern zur Firma A ab.
Wie wird sich die Marktverteilung langfristig entwickeln?
Es ist zu vermuten, dass früher oder später die Firma A 100 % der Marktanteile gewinnt.

(b) Berechnung des Stabilitätsvektors

1. Möglichkeit

[1] Siehe z.B..G. Kemeny, Mathematik für die Wirtschaftspraxis, De Gruyter, 1966, S. 281

Matrix $\mathbf{T}$ und Verteilungsvektor $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$ in die Matrixvariablen [A] und [B] eingegeben. Die Folge von Verteilungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots$ kann besonders schnell berechnet werden, wenn das Ergebnis der Multiplikation [A]*[B] wieder in [B] gespeichert wird.

Tastenfolge: [A]*[B] STO [B], ENTER, ENTER, …

Der GTR liefert nach hinreichend langem Drücken der ENTER-Taste:

[[1][sehr kleine positive Zahl]] → [[1][0]].

Der Stabilitätsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Möglichkeit

Führt man bei der Rekursionsformel $\vec{x}_n = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_{n-1}$ den Grenzübergang für $n \to \infty$ durch, dann folgt die Gleichung $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ und für die Komponenten x_1 und x_2 von $\vec{x}$ gilt $x_1 + x_2 = 1$. $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ wird zum homogenen LGS $(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ umgeformt. Es ist

$$(\mathbf{E}-\mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -0{,}9 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Addiert man zur ersten Zeile der Matrix $\mathbf{E} - \mathbf{T}$ das 9-fache der zweiten Zeile, dann ergibt sich

$$\mathbf{E} - \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

D.h. es gilt $x_2 = 0$; außerdem gilt $x_1 + x_2 = 1$ und damit $x_1 + 0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

Der Stabilitätsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vermutung ist bestätigt. Firma A gewinnt alle Käufer, Firma B geht Pleite!