

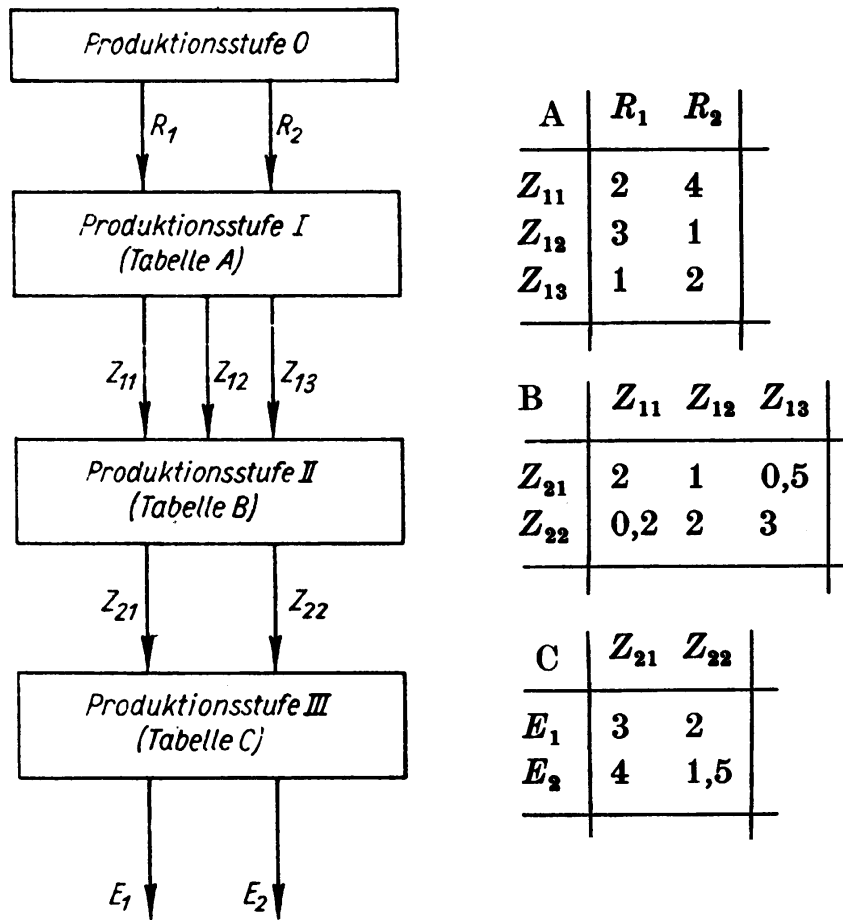
Planarbeit**Produktionsprozesse - Linearen Verflechtungen**

Erarbeiten Sie sich schrittweise die folgenden Themen. Notieren Sie gegebenenfalls zu jedem Thema Fragen. Lösen Sie jeweils die zugehörige Kontrollaufgabe. Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit der Musterlösung und kreuzen Sie an, ob Sie die Aufgabe richtig oder falsch gelöst haben.

Thema	Fragen	Kontrollaufgabe	
		richtig	falsch
(1) Dreistufiger Produktionsprozess, Matrizen der direkten Einsatzkoeffizienten			
(2) Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten zweiter Stufe und den Endprodukten			
(3) Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Zwischenprodukten erster Stufe			
(4) Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Rohstoffen			
(5) Produktionskosten			

Beispiel¹

(1) Dreistufiger Produktionsprozess, Matrizen der direkten Einsatzkoeffizienten



Ökonomisches Flussbild und zeilenorientierte Stücklisten

Im obigen **ökonomischen Flussbild** ist ein **dreistufiger Produktionsprozess** eines Produktionsbetriebes dargestellt. Im Betrieb werden in der ersten Produktionsstufe aus den Rostoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_{11} , Z_{12} und Z_{13} hergestellt. Aus diesen werden in der zweiten Produktionsstufe die Zwischenprodukte Z_{21} und Z_{22} produziert. Erst in der dritten Produktionsstufe entstehen aus den Zwischenprodukten Z_{21} und Z_{22} die Endprodukte E_1 und E_2 .

Die drei Tabellen neben dem ökonomischen Flussbild heißen **Teilnormentabellen** oder einfach **Stücklisten**. Sie geben jeweils den direkten Materialeinsatz je Produktionseinheit der nächsthöheren Produktionsstufe an. Oben sind die Stücklisten **zeilenorientiert**, im folgenden sind sie **spaltenorientiert**.

Spaltenorientierte Stücklisten

A	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}
R_1	2	3	1
R_2	4	1	2

B	Z_{21}	Z_{22}
Z_{11}	2	0,2
Z_{12}	1	2
Z_{13}	0,5	3

C	E_1	E_2
Z_{21}	3	4
Z_{22}	2	1,5

¹ Ose u.a., Lehr u. Übungsbuch Mathematik, Band IV, Seite 97.
1 Planarbeit.DOC

Die Stücklisten sind wie folgt zu lesen:

Um eine Einheit des Zwischenproduktes erster Stufe Z_{11} zu erzeugen, werden 2 Einheiten des Rohstoffes R_1 und 4 Einheiten des Rohstoffes R_2 verarbeitet. Entsprechend liest man den Rohstoffbedarf zur Erzeugung von je einer Einheit der Zwischenprodukte Z_{12} und Z_{13} aus der Tabelle A ab.

Aus der Tabelle B entnehmen wir: zur Erzeugung einer Einheit des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{21} werden 2 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{11} , eine Einheit des Zwischenproduktes Z_{12} und 0,5 Einheiten des Zwischenproduktes Z_{13} benötigt. Für das Zwischenprodukt Z_{22} entnehmen wir entsprechendes aus der Tabelle B.

Schließlich gibt Tabelle C den Einsatz der Zwischenprodukte zweiter Stufe Z_{21} und Z_{22} zur Erzeugung von je einer Einheit der Endprodukte an.

Die zu den Stücklisten gehörigen Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix} \text{ und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix}$$

werden als **Matrizen der direkten Einsatzkoeffizienten** zur Erzeugung der Produkte der nächsthöheren Stufe bezeichnet.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 1

(2) Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten zweiter Stufe und den Endprodukten

Es sollen aus den Zwischenprodukten zweiter Stufe Z_{21} und Z_{22} beispielsweise 100 ME des Endproduktes E_1 und 200 Mengeneinheiten des Endproduktes E_2 erzeugt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte zweiter Stufe Z_{21} und Z_{22} werden hierfür benötigt? Aus der Tabelle C lesen wir die Antwort ab:

C	E_1	E_2
Z_{21}	3	4
Z_{22}	2	1,5

Mengeneinheiten des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{21} : $z_{21} = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 200 = 1100$;
 Mengeneinheiten des Zwischenproduktes zweiter Stufe Z_{22} : $z_{22} = 2 \cdot 100 + 1,5 \cdot 200 = 500$;

Fassen wir die zu produzierenden Mengeneinheiten des Endproduktes zu einem Vektor \vec{y} (**Produktionsvektor**) und die dafür benötigten Mengeneinheiten der Zwischenprodukte zweiter Stufe zu einem Vektor \vec{z}_2 zusammen

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 500 \end{pmatrix},$$

dann ist der Zusammenhang zwischen \vec{y} und \vec{z}_2 durch die folgende Multiplikation gegeben:

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \vec{y}.$$

Merke (Satz 1):

Die Multiplikation der zur Stückliste C gehörigen Matrix **C** mit dem Produktionsvektor \vec{y} ergibt den Vektor von Zwischenprodukten zweiter Stufe \vec{z}_2 , es ist:

$$(1.1) \quad \vec{z}_2 = \mathbf{C} \cdot \vec{y}.$$

Analog gilt:

$$(1.2) \quad \vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{z}_1 \quad \text{und} \quad (1.3) \quad \vec{z}_1 = \mathbf{B} \cdot \vec{z}_2$$

hier ist \vec{r} der Rohstoffvektor und \vec{z}_1 der Vektor von Zwischenprodukten erster Stufe. Die erste Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten erster Stufe und die zweite Gleichung entsprechend den Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten erster und den Zwischenprodukten zweiter Stufe her.

A, **B** und **C** werden Matrizen der **direkten Einsatzkoeffizienten** genannt.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 2

(3) Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Zwischenprodukten erster Stufe

Es sollen 100 ME des Endproduktes E_1 und 200 ME des Endproduktes E_2 hergestellt werden. Wie viele Zwischenprodukte erster Stufe Z_{11} , Z_{12} und Z_{13} müssen hierfür zuvor produziert werden?

Wie oben berechnet, benötigt man für die Produktion der Endprodukte zum Vektors

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Zwischenprodukte zweiter Stufe, deren Mengeneinheiten durch den Vektor

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Für die Erzeugung der Zwischenprodukte zweiter Stufe des Vektors \vec{z}_2 werden Zwischenprodukte erster Stufe benötigt, diese werden durch Multiplikation der Matrix \mathbf{B} mit dem Vektor \vec{z}_2 berechnet (siehe Satz 1, Gleichung (1.3)):

$$\vec{z}_1 = \mathbf{B}\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 2100 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

Zur Erzeugung von 100 ME von Endprodukten E_1 und 200 ME von Endprodukten E_2 müssen 2300 ME des Zwischenproduktes erster Stufe Z_{11} , 2100 ME des Zwischenproduktes Z_{12} und 2050 ME des Zwischenproduktes Z_{13} zuvor hergestellt werden.

Der Vektor \vec{z}_1 kann auch wie folgt berechnet werden (siehe Satz 1, Gleichung (1.1)):

$$\vec{z}_1 = \mathbf{B}\vec{z}_2 \stackrel{(1.1)}{=} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C}\vec{y}) = (\mathbf{BC}) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,4 & 8,3 \\ 7 & 7 \\ 7,5 & 6,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2300 \\ 2100 \\ 2050 \end{pmatrix}.$$

Merke (Satz 2):

Die Matrix \mathbf{BC} stellt den Zusammenhang zwischen den **Zwischenprodukten erster Stufe** und den **Endprodukten** her. Diese Matrix wird deshalb als Matrix von **indirekten** Einsatzkoeffizienten bezeichnet. Zur Matrix \mathbf{BC} gehört die nebenstehende Stücklistentabelle. Es ist:

BC	E_1	E_2
Z_{11}	6,4	8,3
Z_{12}	7	7
Z_{13}	7,5	6,5

$$(2.1) \quad \vec{z}_1 = \mathbf{BC} \cdot \vec{y}$$

Analog stellt die Matrix \mathbf{AB} den Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten zweiter Stufe und den Rohstoffen her. Es ist

$$(2.2) \quad \vec{r} = \mathbf{AB} \cdot \vec{z}_2$$

*Auch das Produkt **AB** wird als Matrix von indirekten Einsatzkoeffizienten bezeichnet..*

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 3

(4) Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Rohstoffen

Es sollen 100 ME von Endprodukten E_1 und 200 ME von Endprodukten E_2 hergestellt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe R_1 und R_2 werden hierfür benötigt?

Den Bedarf an Zwischenprodukten erster Stufe zur Herstellung von Endprodukten zum Produktionsvektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

haben wir oben berechnet. Er ist durch den Zwischenproduktevektor

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2300 \\ 2100 \\ 2050 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Um die in \vec{z}_1 angegebenen Mengeneinheiten von Zwischenprodukten erster Stufe herzustellen, wird der Rohstoffbedarf wie folgt berechnet (siehe Satz 1, Gleichung (1.1)):

$$\vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2300 \\ 2100 \\ 2050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12950 \\ 15400 \end{pmatrix}.$$

Zur Produktion von 100 ME des Endproduktes E_1 und 200 ME des Endproduktes E_2 werden 12950 ME des Rohstoffes R_1 und 15400 des Rohstoffes R_2 benötigt.

Auch der Rohstoffvektor \vec{r} lässt sich auf andere Weise berechnen (siehe Satz 2, Gleichung 2.1)):

$$\vec{r} = \mathbf{A} \vec{z}_1 \stackrel{(2.1)}{=} \mathbf{A}((\mathbf{BC}) \cdot \vec{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6,4 & 8,3 \\ 7 & 7 \\ 7,5 & 6,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41,3 & 44,1 \\ 47,6 & 53,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12950 \\ 15400 \end{pmatrix}$$

Merke (Satz 3)

Die Matrix **ABC** stellt den Zusammenhang zwischen den **Endprodukten** und den **Rohstoffen** her, sie heißt deshalb **Matrix der totalen Einsatzkoeffizienten**. Zur Matrix **ABC** gehört die nebenstehende Stücklistentabelle. Es ist:

ABC	E_1	E_2
R_1	41,3	44,1
R_2	47,6	53,2

$$(3) \quad \vec{r} = \mathbf{ABC} \cdot \vec{y}$$

Wir sehen, der Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukte für einen vorgegebenen Produktionsvektor \vec{y} lässt sich einfach durch Matrizenmultiplikation berechnen. Wir sprechen von einem **Multiplikationsmodell**.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 4

(5) Produktionskosten

Wir nehmen an, es sollen 40 Einheiten E_1 und 60 Einheiten E_2 produziert werden. Wir interessieren uns für die anfallenden Produktions- und Rohstoffkosten.

- Eine Einheit R_1 kostet 3,50 €, eine Einheit R_2 kostet 4,- €.
- Zur Erzeugung einer Einheit Z_{11} aus den Rohstoffen fallen 8,50 € anteilige Lohn- und Maschinenkosten an. Für die Produktion einer Einheit Z_{12} werden 9,80 € und für die Produktion einer Einheit Z_{13} werden 6,50 € Lohn- und Maschinenkosten kalkuliert.
- Die Herstellung je einer Einheit Zwischenprodukte zweiter Stufe aus den Zwischenprodukten erster Stufe verursachen für Z_{21} 18,30 € und für Z_{22} 21,40 € Lohn- und Maschinenkosten.
- Schließlich belaufen sich die Lohn- und Maschinenkosten für die Montage der Endprodukte aus den Zwischenprodukten zweiter Stufe auf 12,50 € für eine Einheit E_1 und 11,80 € für eine Einheit E_2 .

Aus diesen Angaben bilden wir die Kostenvektoren \vec{k}_R , \vec{k}_{Z1} , \vec{k}_{Z2} und \vec{k}_E :

$$\begin{aligned}\vec{k}_R^T &= (3,5 \mid 4) && \text{Kosten für die Rohstoffe,} \\ \vec{k}_{Z1}^T &= (8,5 \mid 9,8 \mid 6,5) && \text{Kosten für die Zwischenprodukte erster Stufe,} \\ \vec{k}_{Z2}^T &= (18,3 \mid 21,4) && \text{Kosten für die Zwischenprodukte zweiter Stufe,} \\ \vec{k}_E^T &= (12,5 \mid 11,8) && \text{Kosten für die Endprodukte.}\end{aligned}$$

Bevor wir die Gesamtproduktionskosten für 40 Einheiten E_1 und 60 Einheiten E_2 ermitteln können, müssen wir die folgenden Fragen beantworten:

1. Wie viele Rohstoffeinheiten R_1 und R_2 werden benötigt?
2. Wie viele Einheiten der Zwischenprodukte erster Stufe Z_{11} , Z_{12} und Z_{13} müssen gefertigt werden?
3. Wie viele Einheiten der Zwischenprodukte zweiter Stufe Z_{21} und Z_{22} müssen hergestellt werden?

Der Produktionsvektor ist

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} .$$

Die Antwort auf die erste Frage ergibt sich aus der Tabelle ABC. Wir multiplizieren die Matrix der totalen Einsatzkoeffizienten **ABC** mit dem Produktionsvektor \vec{y} und erhalten den Rohstoffvektor \vec{r} :

$$\vec{r} = \mathbf{ABC} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 41,3 & 44,1 \\ 47,6 & 53,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4298 \\ 5096 \end{pmatrix} .$$

Die Antwort auf die zweite Frage ergibt sich aus der Tabelle BC. Wir multiplizieren die Matrix der indirekten Einsatzkoeffizienten \mathbf{BC} mit dem Vektor \vec{y} und erhalten den Zwischenproduktevektor \vec{z}_1 :

$$\vec{z}_1 = \mathbf{BC} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 6,4 & 8,3 \\ 7 & 7 \\ 7,5 & 6,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 754 \\ 700 \\ 690 \end{pmatrix} .$$

Die Antwort auf die dritte Frage ergibt sich aus der Tabelle C. Wir multiplizieren die Matrix der direkten Einsatzkoeffizienten \mathbf{C} mit dem Vektor \vec{y} und erhalten den Zwischenproduktevektor \vec{z}_2 :

$$\vec{z}_2 = \mathbf{C}\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 170 \end{pmatrix} .$$

Nun können wir die für die Produktion von 40 Einheiten E_1 und 60 Einheiten E_2 entstehenden Kosten berechnen.

Rohstoffkosten:

$$\vec{k}_R^T \cdot \vec{r} = (3,5 | 4) \cdot \begin{pmatrix} 4298 \\ 5096 \end{pmatrix} = 3,5 \cdot 4298 + 4 \cdot 5096 = 35427 .$$

Lohn- und Maschinenkosten für die Zwischenprodukte erster Stufe:

$$\vec{k}_{Z1}^T \cdot \vec{z}_1 = (8,5 | 9,8 | 6,5) \cdot \begin{pmatrix} 754 \\ 700 \\ 690 \end{pmatrix} = 8,5 \cdot 754 + 9,8 \cdot 700 + 6,5 \cdot 690 = 17754 .$$

Lohn- und Maschinenkosten für die Zwischenprodukte erster Stufe:

$$\vec{k}_{Z2}^T \cdot \vec{z}_2 = (18,3 | 21,4) \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 170 \end{pmatrix} = 18,3 \cdot 360 + 21,4 \cdot 170 = 10266 .$$

Lohn- und Maschinenkosten für die Endmontage:

$$\vec{k}_E^T \cdot \vec{y} = (12,5 | 11,8) \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = 12,5 \cdot 40 + 11,8 \cdot 60 = 1208 .$$

Die Gesamtkosten betragen

$$K = \vec{k}_R^T \cdot \vec{r} + \vec{k}_{Z1}^T \cdot \vec{z}_1 + \vec{k}_{Z2}^T \cdot \vec{z}_2 + \vec{k}_E^T \cdot \vec{y} = 35427 + 17754 + 10266 + 1208 = 64615$$

Die Produktionskosten für 40 Einheiten E_1 und 60 Einheiten E_2 belaufen sich auf 64615 €.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 5