Planarbeit

Stochastische Matrizen

Erarbeiten Sie sich schrittweise die folgenden Themen. Notieren Sie gegebenenfalls zu jedem Thema Fragen. Lösen Sie jeweils die zugehörige Kontrollaufgabe. Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit der Musterlösung und kreuzen Sie an, ob Sie die Aufgabe richtig oder falsch gelöst haben. Lösen Sie die Aufgaben.

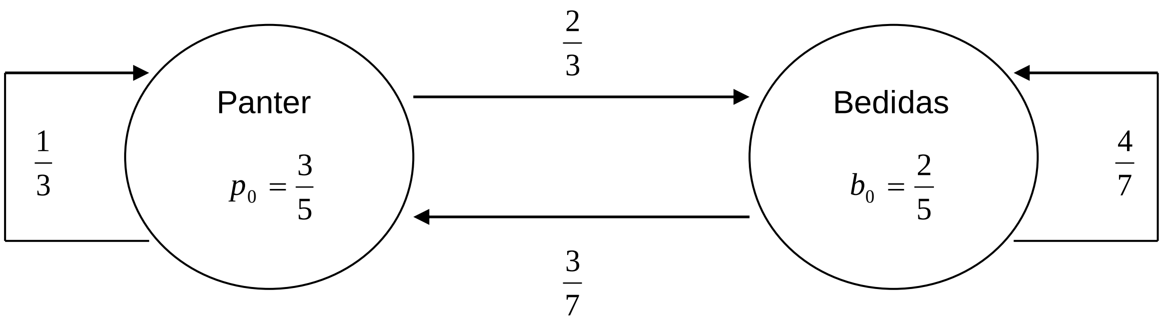
Thema	Fragen	Kontrollaufgabe	
		richtig	falsch
(1) Marktanteile und Käuferverhalten			
(2) Stabilisierung der Marktanteile			
(3) Käuferverhalten und stochastische Matrizen			
(4) Berechnung des Stabilitätsvektors			
Aufgaben	Fragen	richtig	falsch
Aufgabe 1			
Aufgabe 2			
Aufgabe 3			

(1) Marktanteile und Käuferverhalten

Der Markt bei bestimmten Produkten wird oft von einigen wenigen Firmen beherrscht. Durch Qualitätsverbesserungen, Preissenkungen und nicht zuletzt durch Werbemaßnahmen versuchen die einzelnen Firmen, ihre Marktanteile auf Kosten der Konkurrenten zu erhöhen. Wir interessieren uns für ein mathematisches Modell, mit dem das Wechselverhalten der Käufer eines Produktes und die langfristige Entwicklung der Marktanteile beschrieben werden soll.

Beispiel

Der Sportmarkt in der BRD wird im wesentlichen von zwei Firmen beherrscht, nämlich von der Firma Panter und der Firma Bedidas. Die Firma Panter hat einen Marktanteil von 60% (oder $\frac{3}{5}$), die Firma Bedidas hat entsprechend einen Anteil von 40% (oder $\frac{2}{5}$). Im Laufe des Jahres führen beide Firmen Werbekampagnen durch. Einerseits gelingt es der Firma Panter, $\frac{3}{7}$ der Bedidas-Kunden abzuwerben, andererseits wechseln $\frac{2}{3}$ der Panter-Kunden zu Bedidas. Das Käuferverhalten kann durch das folgende Diagramm veranschaulicht werden.



Wie teilen sich die beiden Firmen den Sportschuhmarkt in der neuen Saison auf? Wie verändern sich die Marktanteile längerfristig, wenn die Werbeanstrengungen und damit das Wechselverhalten der Sportschuhkäufer gleich bleibt?

Ausgehend von der Anfangsverteilung der Firma Panter $p_0 = \frac{3}{5}$ und der Firma Bedidas $b_0 = \frac{2}{5}$ werden die Marktanteile p_1 und b_1 in der neuen Saison wie folgt berechnet (neue Verteilung):

Panter: $$p_1 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{3}{7}b_0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{35} \approx 0{,}3714$$

Bedidas: $$b_1 = \frac{2}{3}p_0 + \frac{4}{7}b_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5} = \frac{22}{35} \approx 0{,}6286$$

Im neuen Jahr hat also die Firma Panter einen Marktanteil von 37,14 % und die Firma Bedidas einen Marktanteil von 62,86%.

Zu beachten ist, dass die Summe der Marktanteile beider Firmen sowohl für die Anfangsverteilung als auch in der neuen Saison 1 ist, d.h. es gilt:

$$p_0 + b_0 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad \text{und} \quad p_1 + b_1 = \frac{13}{35} + \frac{22}{35} = \frac{35}{35} = 1.$$

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 1

(2) Stabilisierung der Marktanteile

Genauso berechnet man die Marktanteile für die folgenden Jahre unter der Voraussetzung, dass das Wechselverhalten der Sportschuhkäufer immer gleich bleibt (siehe Kontrollaufgabe 1). Es ist

$$p_2 \approx 0{,}3932 \text{ und } b_2 \approx 0{,}6068;$$
$$p_3 \approx 0{,}3911 \text{ und } b_3 \approx 0{,}6089\ ;$$
$$p_4 \approx 0{,}3913 \text{ und } b_3 \approx 0{,}6087\ .$$

Wir sehen, bei gleich bleibendem Wechselverhalten der Käufer, verändern sich die Marktanteile in den kommenden Jahren nur noch geringfügig. Die Marktanteile scheinen sich zu stabilisieren. Auf welche Werte werden sie sich stabilisieren? Zur Berechnung dieser Werte betrachten wir die Folge der Marktanteile

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \text{ und } b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

wobei

$$p_0 + b_0 = 1,\ p_1 + b_1 = 1,\ p_2 + b_2 = 1, \ldots,\ p_n + b_n = 1, \ldots$$

gilt. Die jeweils nächsten Folgeglieder ergeben sich aus den Rekursionsformeln

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{3}{7}b_k \qquad \text{und} \qquad b_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{4}{7}b_k\ .$$

Nehmen wir an, dass die beiden Folgen den beiden Stabilitätswerten p und b zustreben, dass also gilt:

$$p_k \xrightarrow{k\to\infty} p \text{ und } b_k \xrightarrow{k\to\infty} b\ .$$

Da die Summe der Marktanteile immer 1 ergibt, muss auch die Summe der langfristigen Stabilitätswerte 1 ergeben. Es gilt also

$$(*)\quad p + b = 1\ .$$

Wir führen den Grenzübergang in den Rekursionsformeln durch:

$$\begin{array}{llllcllll} p_{k+1} = & \frac{1}{3}p_k & + & \frac{3}{7}b_k & & b_{k+1} = & \frac{2}{3}p_k & + & \frac{4}{7}b_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \text{, wenn } k\to\infty & \text{und} & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \text{, wenn } k\to\infty \\ p = & \frac{1}{3}p & + & \frac{3}{7}b & & b = & \frac{2}{3}p & + & \frac{4}{7}b \end{array}$$

Subtrahieren wir bei den resultierenden Gleichungen p auf beiden Seiten der linken und b auf beiden Seiten der rechten Gleichung, dann folgt

$$0 = -\frac{2}{3}p + \frac{3}{7}b \qquad \text{und} \qquad 0 = \frac{2}{3}p - \frac{3}{7}b\ .$$

Die beiden Gleichungen reduzieren sich zu einer Gleichung

$$(**) \quad -\frac{2}{3}p + \frac{3}{7}b = 0\,.$$

Zusammen mit der Gleichung (*) erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, das wir mit dem Additionsverfahren lösen. Hierzu multiplizieren wir Gleichung (**) mit 3/2 und addieren das Ergebnis zur Gleichung (*)

$$\begin{array}{rcrcl} -\frac{3}{2}p & + & \frac{3}{7}b & = & 0 \quad |\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow \\ p & + & b & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} -p & + & \frac{9}{14}b & = & 0 \\ p & + & b & = & 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{23}{14}b = 1 \Rightarrow b = \frac{14}{23} \Rightarrow p = \frac{9}{23}$$

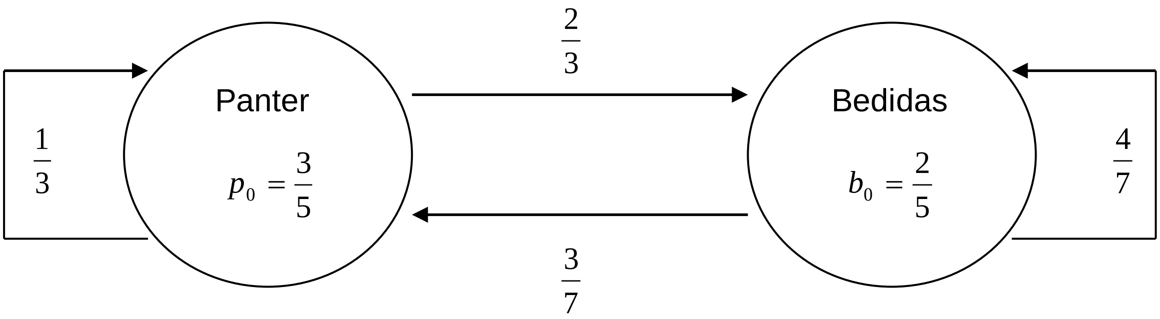
Langfristig stabilisieren sich die Marktanteile der beiden Firmen zu

Panter: $p = \frac{9}{23} \approx 39{,}13\,\%$ Bedidas: $b = \frac{14}{23} \approx 60{,}78\,\%$.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 2

(3) Käuferverhalten und stochastische Matrizen

Wir bleiben bei dem Beispiel der beiden Firmen Panter und Bedidas , die sich den Sportschuhmarkt in Deutschland aufteilen, und dem durch das folgende Diagramm gegebene Wechselverhalten der Käufer.



Ausgehend von den Marktanteilen der beiden Firmen $p_0 = \frac{2}{5}$ und $b_0 = \frac{3}{5}$ haben wir die Anteile p_1 und b_1 im folgenden Jahr mit Hilfe der Gleichungen

$$p_1 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{3}{7}b_0 \qquad \text{und} \qquad b_1 = \frac{2}{3}p_0 + \frac{4}{7}b_0$$

berechnet. Diese Gleichungen lassen sich zu einer Matrizengleichung

$$(*)\ \begin{pmatrix} p_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0$$

zusammenfassen mit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

Wir bemerken, dass alle Elemente der Matrix $\mathbf{T}$ positiv sind und dass die Summe der Elemente in beiden Spalten 1 beträgt. Eine Matrix mit diesen Eigenschaften wird als ***reguläre stochastische Matrix*** bezeichnet.

Definition
Eine quadratische Matrix, deren Elemente nicht negativ sind und bei der die Summe der Spaltenelemente immer 1 ergibt, wird als ***stochastische Matrix*** bezeichnet. Sind die Elemente einer stochastischen Matrix alle positiv, dann heißt sie ***reguläre[1] stochastische Matrix***.

Bemerkungen

(1) Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ ist eine stochastische Matrix, aber nicht regulär.

Die Matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ ist eine reguläre stochastische Matrix.

[1] In der Fachliteratur ist die Definition der **Regularität** schwächer. Z.B. definiert J.G. Kemeny in ‚Mathematik für die Wirtschaftspraxis (De Gruyter, 1966, S. 281)' eine stochastische Matrix als regulär, wenn irgend eine Matrixpotenz nur positive Elemente besitzt.

(2) Die Elemente einer stochastischen Matrix werden als ***Übergangswahrscheinlichkeiten*** bezeichnet. Die Matrix selbst wird auch als ***Übergangs- oder Transformationsmatrix*** bezeichnet.

(3) Die Vektoren $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ heißen ***Verteilungsvektoren***. Sie drücken im entsprechenden Jahr die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass ein zufälliger Käufer von Sportschuhen ein Panter- bzw. ein Bedidas-Produkt kauft. $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ heißen deshalb auch Wahrscheinlichkeitsvektoren.
Da ein Verteilungsvektor die Marktanteile wiedergibt, ist die Summe seiner Komponenten immer 1 (Gesamter Markt $\hat{=}$ 100%). Mit Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt: Die in einem Verteilungsvektor gegebenen Wahrscheinlichkeiten addieren sich zu 1 (die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportschuhkäufer irgendein Paar Sportschuhe kauft ist 1).

(4) Die Tabelle zum obigen Beispiel

	Panter	Bedidas
Panter	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$
Bedidas	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$
	1	1

wird wie folgt gelesen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchter Panter-Käufer bei Panter bleibt, ist $\frac{1}{3}$, die Wahrscheinlichkeit, dass er zu Bedidas wechselt, ist $\frac{2}{3}$.
Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchter Bedidas-Käufer zu Panter wechselt, $\frac{3}{7}$ und, dass er bei Bedidas bleibt, $\frac{4}{7}$.
Das zur Tabelle gehörige Diagramm zum Käuferverhalten wird als ***Übergangsdiagramm*** bezeichnet.

Mit Hilfe der Übergangsmatrix kann eine Folge $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ...$ von Verteilungsvektoren berechnet werden ($\vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_2$, …), die die Marktanteile der beiden Firmen in den kommenden Jahren wiedergeben.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 3

(4) Berechnung des Stabilitätsvektors

Führt man die Berechnungen wie in der Kontrollaufgabe 3 ($\vec{x}_1 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_2$, $\vec{x}_4 = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_3$, …) immer weiter, dann sieht man, dass die Folge der Verteilungsvektoren $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ einem Vektor $\vec{x}$ zustrebt. Wir führen den Grenzübergang auf beiden Seiten der Matrixgleichung durch:

$$\begin{array}{ccll}
\vec{x}_1 & = & \mathbf{T} \cdot \vec{x}_0 & \\
\vec{x}_2 & = & \mathbf{T} \cdot \vec{x}_1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\vec{x}_n & = & \mathbf{T} \cdot \vec{x}_{n-1} & \\
\downarrow & & \downarrow & \text{Grenzübergang für } n \to \infty \\
\vec{x} & = & \mathbf{T} \cdot \vec{x} & (\vec{x} \text{ Stabilitätsvektor})
\end{array}$$

Die Gleichung $\vec{x}_n = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_{n-1}$ bezeichnen Sie als Rekursionsgleichung.

Das Ergebnis $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ des Grenzübergangs interpretieren wir wie folgt: Multipliziert man die Übergangsmatrix $\mathbf{T}$ mit dem Vektor $\vec{x}$, dann ändert sich nichts an den Marktanteilen. Die Marktanteile bleiben stabil. $\vec{x}$ wird deshalb als ***Stabilitätsvektor*** bezeichnet.

Merke: Auch für den Stabilitätsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist die Summe seiner Komponenten 1, d.h. es ist

$$x_1 + x_2 = 1$$

Zur Berechnung des Stabilitätsvektors formen wir die Grenzwertgleichung $\vec{x} = \mathbf{T} \cdot \vec{x}$ um:

$$\begin{array}{rcll}
\vec{x} & = & \mathbf{T} \cdot \vec{x} & | -\mathbf{T} \cdot \vec{x} \\
\vec{x} - \mathbf{T} \cdot \vec{x} & = & \vec{0} & \\
\mathbf{E} \cdot \vec{x} - \mathbf{T} \cdot \vec{x} & = & \vec{0} & \\
(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} & = & \vec{0} &
\end{array}$$

Die Gleichung $(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise dar:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \right)}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}-\mathbf{T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen es mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{3}{7} & 0 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das homogene LGS hat, wegen der Nullzeile unendlich viele Lösungen. Aber die Komponenten x_1 und x_2 des gesuchten Stabilitätsvektors erfüllen die Gleichung $x_1 + x_2 = 1$ und wir können die Nullzeile hiermit ersetzen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mid \cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{23}{21} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \mid \cdot\left(-\tfrac{21}{23}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{14}{23} \end{array}\right) \mid \cdot(-1) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9}{23} \\ 0 & 1 & \frac{14}{23} \end{array}\right)$$

Wir lesen $x_1 = \frac{9}{23}$ und $x_2 = \frac{14}{23}$ ab. Damit ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} \\ \frac{14}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}3913 \\ 0{,}6087 \end{pmatrix}$ der gesuchte Stabilitätsvektor.

Bemerkung
Die Rekursionsgleichung $\vec{x}_n = \mathbf{T} \cdot \vec{x}_{n-1}$ kann wie folgt umgeformt werden

$$\begin{array}{lllllll} \vec{x}_1 & = & \mathbf{T}\cdot\vec{x}_0 & & & & \\ \vec{x}_2 & = & \mathbf{T}\cdot\vec{x}_1 & = & \mathbf{T}(\mathbf{T}\cdot\vec{x}_0) & = & \mathbf{T}^2\cdot\vec{x}_0 \\ \vec{x}_3 & = & \mathbf{T}\cdot\vec{x}_2 & = & \mathbf{T}(\mathbf{T}^2\cdot\vec{x}_0) & = & \mathbf{T}^3\cdot\vec{x}_0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \vec{x}_n & = & \mathbf{T}\cdot\vec{x}_{n-1} & = & \cdots & = & \mathbf{T}^n\cdot\vec{x}_0 \end{array}$$

Also gilt

$$\vec{x}_n = \mathbf{T}^n \cdot \vec{x}_0 \,.$$

Der Verteilungsvektor im n-ten Jahr kann mit Hilfe der Matrixpotenz $\mathbf{T}^n$ direkt aus der Anfangsverteilung berechnet werden.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 4