2 Grundlagen der Matrizenrechnung

Didaktische Hinweise

Die folgende Station stellt Aufgaben zum Rechnen mit Matrizen vor. Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler die Addition von Matrizen, die Multiplikation mit einem Skalar, die Multiplikation mit Vektoren und mit Matrizen sowie das Transponieren und die Inversion von Matrizen kennen.

Bei der ersten Aufgabe führen die Schülerinnen und Schüler Berechnungen mit konkreten Matrizen durch. Dafür steht ihnen eine detaillierte Anleitung zur Verfügung. In der zweiten Aufgabe geht es um die das Kommutativität der Multiplikation von Matrizen. Hier werden Berechnungen mit konkreten Matrizen vorgegeben, zu denen die Schülerinnen und Schüler detaillierte Kommentare schreiben sollen.

Bei der dritten Aufgabe untersuchen die Schülerinnen und Schüler zunächst an konkreten Matrizen und dann allgemein für 2×2-Matrizen das Distributivgesetz der Matrizenmultiplikation. Dazu können sie Hilfen in zwei Stufen in Anspruch nehmen.

Mit der vierten Aufgabe soll die Fähigkeit zu argumentieren gefördert werden: Die Schülerinnen und Schüler beantworten Fragen, prüfen Behauptungen oder suchen Fehler – sowohl bei konkreten Berechnungen als auch an allgemeinen Fällen.

Bei den beiden Aufgaben 3 und 4 ist der Schwierigkeitsgrad der Teilaufgaben a) niedrig und der von b) mittel. Die Teilaufgaben c) haben jeweils einen recht hohen Schwierigkeitsgrad und sind als Joker für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler gedacht.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler …

… wenden die Rechenoperationen mit Matrizen mit konkreten und in einfachen Fällen mit allgemeinen Matrizen und Vektoren an.

… beschreiben vorgegebene Rechenoperationen mit Matrizen

… erkennen, dass die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

… kennen die Besonderheiten der Matrizenmultiplikation mit der Einheitsmatrix und mit der inversen Matrix.

… beweisen das Distributivgesetz der Matrizenmultiplikation

… nennen Argumente, mit denen sie Behauptungen über Matrizenoperationen bestätigen oder widerlegen.

… erkennen anhand der Dimension zweier Matrizen, ob sie addiert oder multipliziert werden können.

… wenden die Rechenregeln für Matrizen an.

…

Übersicht der Materialien

- 4 Aufgabenblätter mit Lösungen
- Karten mit Tipps zu den Aufgaben 3 und 4.

Aufgabe 1: Matrizen addieren

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 3{,}1 \\ 4{,}5 & 3 & -2 & 0{,}5 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Addieren Sie die Matrizen A und B.

Hinweise:

Jedes Element der Matrix A wird zum entsprechenden Element der Matrix B addiert.

b) Vergleichen Sie $4 \cdot (A + B)$ und $4 \cdot A + 4 \cdot B$.

Hinweise:

- $4 \cdot (A + B)$
  Zuerst die Summe berechnen, dann jedes Element mit 4 multiplizieren.
- $4 \cdot A + 4 \cdot B$
  Zuerst jedes Element von A und B mit 4 multiplizieren, dann die Summe berechnen.
- Vergleich
  Die Ergebnisse sind gleich, wenn alle Elemente übereinstimmen.

c) Vergleichen Sie $A + C^T$ und $A^T + C$.

Hinweise:

- $A + C^T$
  Zuerst C transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen, dann die Summe berechnen.
- $A^T + C$
  Zuerst A transponieren und dann die Summe berechnen.
- Vergleich
  … auch mit $(A + C^T)^T$.

Aufgabe 2: Matrizen Multiplizieren

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie Kommentare zu folgenden Rechnungen.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 10 \\ -2 & -4 & 3 \\ -13 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad ; \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -2 & -13 \\ 0 & -4 & 0 \\ 10 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^T \cdot B^T \neq B^T \cdot A^T$ und $B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$

c)

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot C = C \cdot A = E$ (Einheitsmatrix)
$A = C^{-1}$ und $C = A^{-1}$

Aufgabe 3: Klammerregeln für Matrizen

Sie untersuchen, ob für die Matrizenmultiplikation das Distributivgesetz $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ gilt.

a) Zunächst zeigen Sie, dass es für die folgenden Matrizen A, B und C gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) In der folgenden Rechnung sind beim Anwenden des Distributivgesetzes einige Zahlen verloren gegangen. Welche?

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & \dots \\ 5 & \dots & 4 \\ \dots & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & \dots \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 & \dots & -15{,}5 \\ 0 & -10 & 13 \\ 0{,}5 & -12{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

c) Sie zeigen, dass das Distributivgesetz für beliebige 2×2-Matrizen gilt.

Aufgabe 4: Begründen und Argumentieren

a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche Rechenoperationen sind möglich, welche nicht? Begründen Sie!

	möglich	nicht möglich		möglich	nicht möglich
$A + B$			$B \cdot A$		
$A^T + B$			$A \cdot C$		
$B + C$			$B \cdot C$		
$A \cdot$ B			$A \cdot B + C$		

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

	richtig	falsch
Das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$ hat genau eine Lösung.		
Es gibt eine Matrix $B \neq O$, welche die Gleichung $A\cdot B = O$ erfüllt.		
Die Matrix A^T ist nicht invertierbar.		

c) Joker: Wir betrachten alle Matrizen vom Typ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Begründen Sie:

– Die Summe und das Produkt zweier solcher Matrizen sind ebenfalls vom Typ M.

– Jede solche Matrix außer der Nullmatrix ist invertierbar und die Inverse ist ebenfalls vom Typ M.

– Es gibt Matrizen $A \neq E$ vom Typ M, für die gilt $A\cdot A^T = E$.

Hinweis:

Zu den Aufgaben 3 und 4 gibt es Tipps. Wenn Sie mehr Hilfe brauchen, dürfen Sie auch den Lösungsvorschlag anschauen, aber versuchen Sie, die Aufgaben zuerst selbst zu lösen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1: Matrizen addieren

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 3{,}1 \\ 4{,}5 & 3 & -2 & 0{,}5 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Addieren Sie die Matrizen A und B

Jedes Element der Matrix A wird zum entsprechenden Element der Matrix B addiert.

$$A + B = \begin{pmatrix} 4-5 & 3-2 & 7+0 & 1+3{,}1 \\ 0+4{,}5 & 4+3 & 2-2 & 5+0{,}5 \\ 0+7 & 3+0 & 6+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 7 & 4{,}1 \\ 4{,}5 & 7 & 0 & 5{,}5 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Vergleichen Sie $4 \cdot (A + B)$ und $4 \cdot A + 4 \cdot B$.

Hinweise:

- $4 \cdot (A + B)$:
  Zuerst die Summe berechnen, dann jedes Element mit 4 multiplizieren.
- $4 \cdot A + 4 \cdot B$:
  Zuerst jedes Element von A und B mit 4 multiplizieren, dann die Summe berechnen.
- Vergleich
  Die Ergebnisse sind gleich, wenn alle Elemente übereinstimmen.

$$4 \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 28 & 16{,}4 \\ 18 & 28 & 0 & 22 \\ 28 & 12 & 24 & 8 \end{pmatrix}$$

$4A + 4B =$

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 & 28 & 4 \\ 0 & 16 & 8 & 20 \\ 0 & 12 & 24 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & -8 & 0 & 12{,}4 \\ 18 & 12 & -8 & 2 \\ 28 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 28 & 16{,}4 \\ 18 & 28 & 0 & 22 \\ 28 & 12 & 24 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse sind gleich.

c) Vergleichen Sie $A + C^T$ und $A^T + C$.

Hinweise:

- $A + C^T$
  Zuerst C transponieren, d.h. Zeilen und Spalten vertauschen, dann die Summe berechnen.
- $A^T + C$
  Zuerst A transponieren und dann die Summe berechnen.
- Vergleich
  … auch mit $(A + C^T)^T$.

$$C^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + C^T = \begin{pmatrix} 4-5 & 3+1 & 7+2 & 1+4 \\ 0+3 & 4+2 & 2+0 & 5+1 \\ 0+4 & 3+0 & 6+0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T + C = \begin{pmatrix} 4-5 & 0+3 & 0+4 \\ 3+1 & 4-2 & 3+0 \\ 7+2 & 2+0 & 6+0 \\ 1+4 & 5+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse sind zueinander transponiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2: Matrizen multiplizieren

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie Kommentare zu folgenden Rechnungen.

a) Das Produkt A·B berechnen.	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Das Produkt $B \cdot A$ berechnen.	$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Die Ergebnisse vergleichen: $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sind verschieden.	$= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 10 \\ -2 & -4 & 3 \\ -13 & 0 & -10 \end{pmatrix}$; $A \cdot B \neq B \cdot A$
b) Das Produkt $A \cdot B$ berechnen.	$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
A und B transponieren.	$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
Das Produkt der transponierten Matrizen $A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$ berechnen.	$A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
	$= \begin{pmatrix} 13 & -2 & -13 \\ 0 & -4 & 0 \\ 10 & 3 & -10 \end{pmatrix}$
Das Produkt der transponierten Matrizen $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ berechnen.	$B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Die Ergebnisse miteinander und mit $(A \cdot B)^{\mathrm{T}}$ vergleichen.	$A^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}} \neq B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ und $B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} = (A \cdot B)^{\mathrm{T}}$
c) Das Produkt $A \cdot C$ berechnen.	$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Das Produkt $C \cdot A$ berechnen.	$C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
	$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Die Ergebnisse vergleichen. Den Zusammenhang zwischen A und C beschreiben.	$A \cdot C = C \cdot A = E$ (Einheitsmatrix) $A = C^{-1}$ und $C = A^{-1}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3: Klammerregeln für Matrizen

Sie untersuchen, ob für die Matrizenmultiplikation das Distributivgesetz $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ gilt.

a) Zunächst zeigen Sie, dass es für die folgenden Matrizen A, B und C gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C + B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8{,}5 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

also $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

b) In der folgenden Rechnung sind beim Anwenden des Distributivgesetzes einige Zahlen verloren gegangen. Welche?

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & \dots \\ 5 & \dots & 4 \\ \dots & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & \dots \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 & \dots & -15{,}5 \\ 0 & -10 & 13 \\ 0{,}5 & -12{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

Linke Seite nach dem Distributivgesetz ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \dots \\ 5 & \dots & 4 \\ \dots & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & \dots \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & \dots \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Erstes Matrizenprodukt mit der ersten Matrix auf der rechten Seite gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \dots \\ 5 & \dots & 4 \\ \dots & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & \dots \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch den Vergleich der Elemente in der zweiten Spalte bestimmen Sie die fehlenden Elemente in der ersten Matrix. Mit dem Ergebnis vergleichen Sie die Elemente der dritten Spalte und erhalten das fehlende Element in der zweiten Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zweites Matrizenprodukt mit der zweiten Matrix auf der rechten Seite gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 2 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & \dots & -15{,}5 \\ 0 & -10 & 13 \\ 0{,}5 & -12{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

Durch den Vergleich der Elemente in der ersten Zeile bestimmen Sie die beiden fehlenden Elemente in der ersten Zeile. Das fehlende Element in der dritten Zeile finden Sie durch den Vergleich mit einem der Elemente in der dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 12{,}5 & -15{,}5 \\ 0 & -10 & 13 \\ 0{,}5 & -12{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die beiden fehlenden Elemente der zweiten Zeile stellen Sie ein Gleichungssystem mit den beiden Elementen in der zweiten Zeile und der zweiten und dritten Spalte auf:
$-3x + 4y = -10$ und $4x - 5y = 13$
und erhalten die Lösung $x = 2$ und $y = -1$.

Die vollständige Rechnung ist also

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -0{,}5 & 4{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 & 12{,}5 & -15{,}5 \\ 0 & -10 & 13 \\ 0{,}5 & -12{,}5 & 15{,}5 \end{pmatrix}$$

c) Sie zeigen, dass das Distributivgesetz für beliebige 2×2-Matrizen gilt.

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ gilt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A + B)\cdot C &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})\cdot c_{11} + (a_{12}+b_{12})\cdot c_{21} & (a_{11}+b_{11})\cdot c_{12} + (a_{12}+b_{12})\cdot c_{22} \\ (a_{21}+b_{21})\cdot c_{11} + (a_{22}+b_{22})\cdot c_{21} & (a_{21}+b_{21})\cdot c_{12} + (a_{22}+b_{22})\cdot c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot c_{11} + b_{11}\cdot c_{11} + a_{12}\cdot c_{21} + b_{12}\cdot c_{21} & a_{11}\cdot c_{12} + b_{11}\cdot c_{12} + a_{12}\cdot c_{22} + b_{12}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot c_{11} + b_{21}\cdot c_{11} + a_{22}\cdot c_{21} + b_{22}\cdot c_{21} & a_{21}\cdot c_{12} + b_{21}\cdot c_{12} + a_{22}\cdot c_{22} + b_{22}\cdot c_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot c_{11} + a_{12}\cdot c_{21} & a_{11}\cdot c_{12} + a_{12}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot c_{11} + a_{22}\cdot c_{21} & a_{21}\cdot c_{12} + a_{22}\cdot c_{22} \end{pmatrix}$$

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\cdot c_{11} + b_{12}\cdot c_{21} & b_{11}\cdot c_{12} + b_{12}\cdot c_{22} \\ b_{21}\cdot c_{11} + b_{22}\cdot c_{21} & b_{21}\cdot c_{12} + b_{22}\cdot c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C + B\cdot C = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot c_{11} + b_{11}\cdot c_{11} + a_{12}\cdot c_{21} + b_{12}\cdot c_{21} & a_{11}\cdot c_{12} + b_{11}\cdot c_{12} + a_{12}\cdot c_{22} + b_{12}\cdot c_{22} \\ a_{21}\cdot c_{11} + b_{21}\cdot c_{11} + a_{22}\cdot c_{21} + b_{22}\cdot c_{21} & a_{21}\cdot c_{12} + b_{21}\cdot c_{12} + a_{22}\cdot c_{22} + b_{22}\cdot c_{22} \end{pmatrix}$$

also $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4: Begründen und Argumentieren

a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche Rechenoperationen sind möglich, welche nicht? Begründen Sie!

	möglich	nicht möglich		möglich	nicht möglich
$A + B$ $A_{2,3}$ und $B_{3,2}$		X	$B \cdot A$ $B_{3,2}$ und $A_{2,3}$	X	
$A^T + B$ $A^T_{3,2}$ und $B_{3,2}$	X		$A \cdot C$ $A_{2,3}$ und $C_{3,3}$	X	
$B + C$ $B_{3,2}$ und $C_{3,3}$		X	$B \cdot C$ $B_{3,2}$ und $C_{3,3}$		X
$A \cdot B$ $A_{2,3}$ und $B_{3,2}$	X		$A \cdot B + C$ $(A \cdot B)_{2,2}$ u. $C_{3,3}$		X

b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

	richtig	falsch
Das lineare Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$ hat genau eine Lösung. Durch Zeilenumformung erhält man die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Das LGS hat unendlich viele Lösungen.		X
Es gibt eine Matrix $B \neq O$, welche die Gleichung $A \cdot B = O$ erfüllt. Jede 3×3-Matrix, deren Spalten jeweils einen der unendlich vielen Lösungsvektoren enthalten, erfüllt die Gleichung, z.B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	X	
Die Matrix A^T ist nicht invertierbar. Wenn A^T invertierbar wäre, wäre die transponierte Matrix zur Inversen von A^T die Inverse von A. A ist aber nicht invertierbar.	X	

c) <u>Joker:</u> Wir betrachten alle Matrizen vom Typ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Begründen Sie:

– Die Summe und das Produkt zweier solcher Matrizen sind ebenfalls vom Typ M.

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ Die Summe ist vom Typ M.

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(bc+ad) & -bd+ac \end{pmatrix}$ Das Produkt ist vom Typ M.

– Jede solche Matrix außer der Nullmatrix ist invertierbar und die Inverse ist ebenfalls vom Typ *M*.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a^2+b^2 & 0 & a & -b \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right)$$

Da die Matrix nicht die Nullmatrix ist, ist $a^2 + b^2 > 0$. Also ist sie invertierbar und vom Typ *M*.

– Es gibt Matrizen $A \neq E$ vom Typ *M*, für die gilt $A \cdot A^T = E$.

Aus der obigen Umformung folgt, dass $A^{-1} = A^T$, wenn $a^2 + b^2 = 1$.

z.B. $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tipps zu Aufgabe 3 a)

Sie berechnen zuerst $A + B$ und multiplizieren das Ergebnis mit C.
Beachten Sie die richtige Reihenfolge!

Dann berechnen Sie $A \cdot C$ und $B \cdot C$ und bilden anschließend die Summe der Ergebnisse.

Wenn Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie in beiden Fällen dasselbe Ergebnis.

Tipps zu Aufgabe 3 b)

Sie multiplizieren auf der linken Seite die Klammer nach dem Distributivgesetz aus und setzen die beiden einzelnen Produkte jeweils mit den Matrizen auf der rechten Seite gleich.

Tipps zu Aufgabe 3 c)

Als beliebige 2×2-Matrizen setzen Sie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Sie berechnen wieder $A + B$ und multiplizieren das Ergebnis mit C.
Beachten Sie die richtige Reihenfolge!

Jedes Element des Produktes $(A + B) \cdot C$ enthält eine Klammer der Form $(a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk}$.

Diese Klammern multiplizieren Sie aus und vergleichen die Ergebnisse mit den Elementen von $A \cdot C + B \cdot C$.

Tipps zu Aufgabe 3 a)

Tipps zu Aufgabe 3 b)

Tipps zu Aufgabe 3 c)

Tipps zu Aufgabe 4 a)

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie dieselbe Zeilenzahl und dieselbe Spaltenzahl haben.

Man kann Matrizen nur multiplizieren, wenn die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Spaltenzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.

Das Produkt zweier Matrizen hat dieselbe Zeilenzahl wie die erste und dieselbe Spaltenzahl wie die zweite Matrix.

Tipps zu Aufgabe 4 b)

Wenden Sie das Gauß-Verfahren an, um die Lösbarkeit des LGS zu untersuchen.

Die Nullmatrix O enthält der Mal den Vektor $\vec{o}$. Deshalb lässt sich die Entscheidung über die erste Aussage auf die zweite übertragen.

Die Invertierbarkeit der Matrix hängt ebenfalls eng mit der Lösbarkeit des LGS zusammen. Betrachten Sie die letzte Zeile der erweiterten Matrix.

Für invertierbar Matrizen M gilt: $(M^{-1})^{\mathrm{T}} = (M^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Tipps zu Aufgabe 4 c)

- Sie wählen eine weitere Matrix vom Typ M, z.B. $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ und berechnen damit die Summe und das Produkt.
- Sie erweitern die Matrix M mit der Einheitsmatrix und berechnen mit dem Gauß-Algorithmus die Inverse. Dabei tritt die Summe $a^2 + b^2$ im Nenner auf. Sie begründen, dass dieser Term im vorliegenden Fall immer größer als 0 ist.
- Wenn die Gleichung gilt, muss $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$ sein. Anhand der Berechnung der Inversen können Sie eine Bedingung für a und b angeben.

Tipps zu Aufgabe 4 a)

Tipps zu Aufgabe 4 b)

Tipps zu Aufgabe 4 c)