FEUSP- SEMINÁRIOS DE ENSINO DE MATEMÁTICA-1º semestre/2008

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA ESCOLA BÁSICA: POSSÍVEL E NECESSÁRIO

Nílson José Machado
njmachad@usp.br

Sempre que pensamos em grandezas que variam com o passar do tempo, as idéias fundamentais do Cálculo estão presentes tacitamente em nosso pensamento.

É do diálogo entre a permanência e a variação, juntamente com a busca de uma forma de caracterização da rapidez com que uma grandeza varia com outra, que nascem as duas idéias fundamentais do Cálculo: a integral e a derivada.

A IDÉIA DE INTEGRAL

Modernamente, poderíamos afirmar que a idéia de integral nasce do casamento da síndrome do **Raul Seixas** com a síndrome da **Gabriela.**

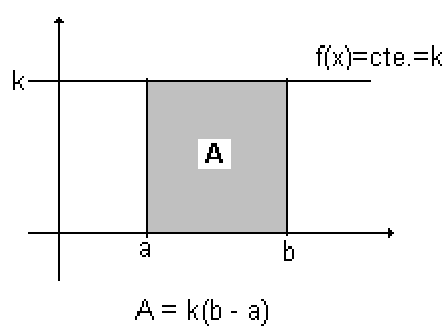
É impossível o conhecimento do que é efêmero, do que está sempre mudando, já dizia Parmênides: somente é possível conhecer o que permanece invariável, o que é essencial e não muda nunca apesar das aparências. Já Heráclito garantia que a vida é permanente mudança, e afirmava que nós nunca nos banhamos duas vezes no mesmo rio: quando voltamos lá, ele não é mais o mesmo, nem nós. Estes dois pontos de vista contrapõem-se há muito tempo, e os dois filósofos pré-socráticos acima referidos apenas representam posições antagônicas, que sobrevivem ao longo dos séculos.

Modernamente, as posições de Heráclito e de Parmênides podem ser associadas à contraposição entre as síndromes de Raul Seixas e de Gabriela: entre a "metamorfose ambulante" do primeiro e a resignação do "eu nasci assim, eu cresci assim, vou ser sempre assim..." da segunda, bem caracterizadas em conhecidas canções populares.

Nosso objetivo aqui é explorar tal contraposição para apresentar o cerne de uma das idéias fundamentais do Cálculo: a noção de Integral. De fato, tal noção se constitui justamente a partir do fecundo diálogo entre a constância e a variabilidade. Tratar uma grandeza que é variável como se fosse constante em pequenos trechos que se sucedem, eis aí a própria idéia de integral. Explicitaremos um pouco mais tal fato a seguir.

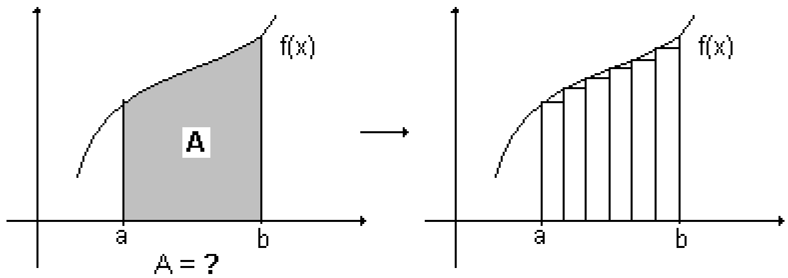
Consideremos uma grandeza representada por uma função do tipo Gabriela, constante (e positiva) em todo o intervalo em que a examinamos, e busquemos calcular a área sob o gráfico da mesma no intervalo referido. Trata-se de uma tarefa simples, uma vez que a região delimitada é um retângulo: nenhuma dúvida sobre o cálculo a ser efetuado, portanto.

- função "Gabriela" (constante)



Consideremos agora uma grandeza (positiva) que não é constante, que varia continuamente ao longo do intervalo considerado, sendo representada por uma função "Raul Seixas" como a seguinte:

- função "Raul Seixas" (continuamente variável)



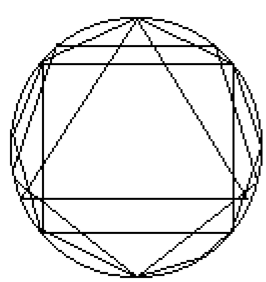
Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos para que em cada um deles a grandeza possa ser tratada como se fosse praticamente constante. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos.

Há inúmeras situações que sabemos analisar, no caso de a grandeza envolvida ser constante, e que queremos analisar quando a grandeza passa a ser variável. A estratégia é sempre raciocinar como se ela fosse constante em pequenos trechos: reduzimos a situação em que a grandeza varia a outra situação em que ela é constante em pequenos intervalos. Integrar é juntar esses pedaços.

Agora: como fazer isso, concretamente?

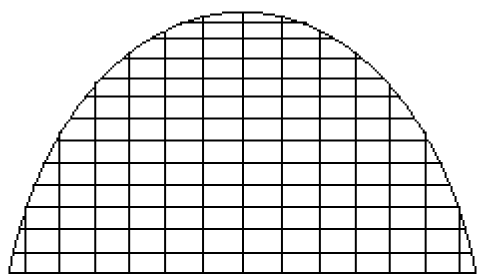
Arquimedes (séc. III a.C.) já fazia isso, pelo método da exaustão.

<u>Exemplo</u>: área do círculo, aproximada pelas áreas de polígonos inscritos, com número crescente de lados.



A técnica desses cálculos pode ser deixada para o ensino de Cálculo propriamente dito (os cursos de Cálculo quase que se resumem às técnicas), mas as idéias podem ser tratadas desde cedo.

A Universidade aberta, da Inglaterra (trata-se de curso superior por correspondência), utiliza um material escrito muito bem elaborado e o curso de Cálculo é particularmente interessante. Nele, o curso de cálculo começa com a idéia de integral: consideram uma parede de um ginásio com a forma abaixo, feita de tijolos aparentes e pede-se para calcular sua área.

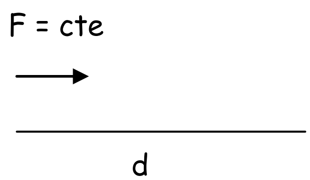


Arquimedes não chegou às técnicas de integração, porque para isso seria necessário tratar de outra idéia fundamental do Cálculo: a de derivada, que foi desenvolvida muito mais tarde.

Qual a diferença entre a física do ensino médio e a vista na Universidade? No ensino médio consideram-se grandezas constantes.

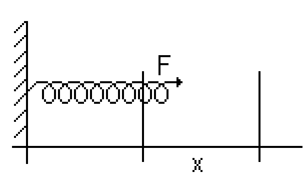
Exemplos:

1) Trabalho



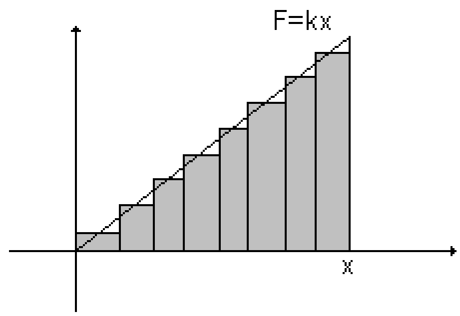
$\Rightarrow\ \tau = F.d$

2) Força elástica



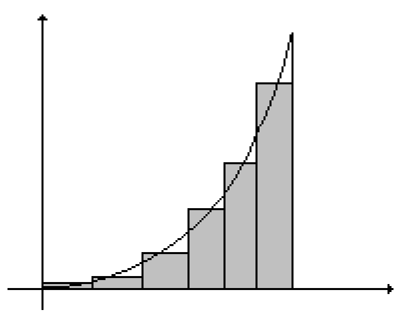
F não constante (é proporcional a x): F = kx

No segundo caso, o trabalho não será mais o mero produto de F por x. Raciocinamos como se em cada pequeno deslocamento a força fosse constante:

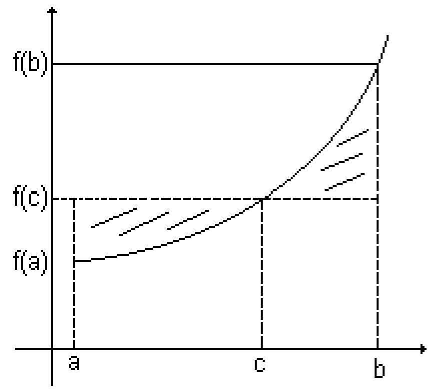


Se escolhemos o ponto médio de cada subintervalo da partição, obtemos a área exata do triângulo: $\tau = \frac{1}{2}kx^2$.

3) E no caso de a força não ser proporcional ao deslocamento? Teremos mais trabalho para calcular, mas a idéia será rigorosamente a mesma:



Aqui, não adianta escolher o ponto médio, mas sempre será possível escolher um ponto tal que as áreas acima e abaixo se igualem, como garante o <u>Teorema do Valor Médio</u>, visto em curso de Cálculo:

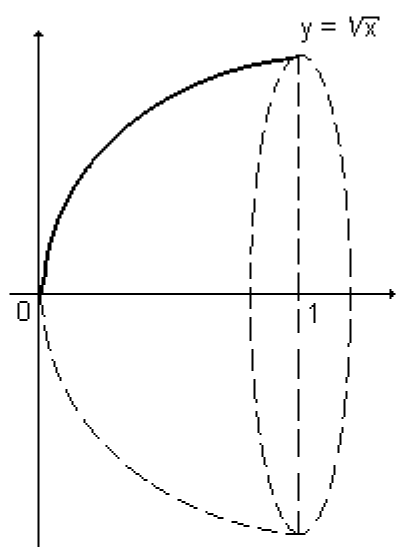


Existe c, $a \leq c \leq b$, tal que $f(c).(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$.

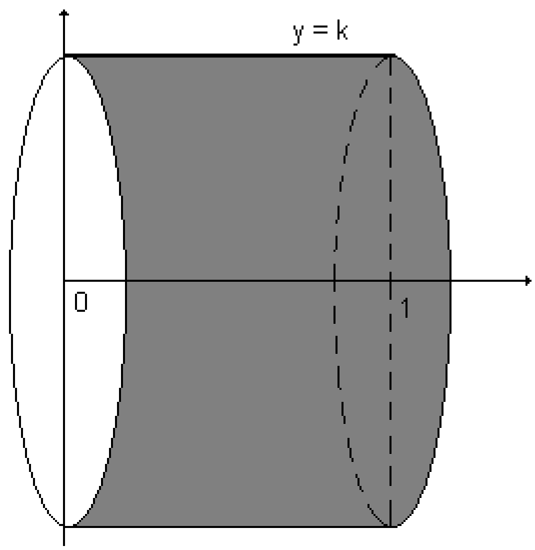
Se houvesse proporcionalidade, o ponto c estaria no meio do segmento [a, b].)

O problema maior é fazer as contas, a técnica propriamente dita. Aprendemos, vemos como é possível resolver o problema, mas sua resolução pode envolver muito trabalho. Esse aspecto, porém, também é favorável, pois preparará o aluno para que venha a apreciar as facilidades que serão depois apresentadas, em um curso de Cálculo.

Problema: Calcular o volume do parabolóide de revolução da figura abaixo:

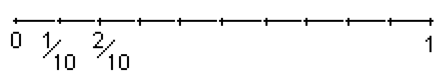


Se a função fosse constante, teríamos o volume de um cilindro:

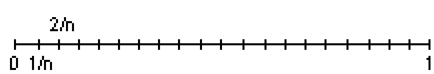


$$V = (\pi\ k^2).1 = \pi\ k^2$$

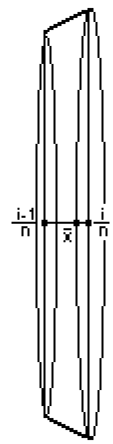
Reduzimos o problema a calcular os volumes de “fatias cilíndricas” e depois somar esses volumes parciais. Podemos, por exemplo, dividir o intervalo [0, 1] em 10 subintervalos:



Genericamente, o intervalo [0, 1] fica dividido em n partes:



A i-ésima fatia do parabolóide:



$V_i = \pi \left(\sqrt{\frac{i}{n}} \right) . \frac{1}{n} = \pi \, . \, \frac{1}{n^2}$ (ou $V_i = \pi . \bar{x} . \frac{1}{n}$, no caso de se considerar um ponto $\bar{x}$ qualquer, no lugar de $\frac{i}{n}$). Para determinar V, somamos as "n" fatias:

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \\
&= \frac{\pi}{n^2} + \frac{2\pi}{n^2} + \frac{3\pi}{n^2} + \ldots + \frac{n\pi}{n^2} = \\
&= \frac{\pi}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \\
&= \frac{\pi}{n^2} . \frac{n(n+\ )}{2} = \\
&= \frac{\pi}{2} . \frac{(n+\ )}{n} = \\
&= \frac{\pi}{2} .(1 + \frac{1}{n}).
\end{aligned}
$$

Fazendo <u>n</u> muito grande, $\frac{1}{n}$ se torna muito pequeno. Logo, $V = \frac{\pi}{2}$.

Sem a técnica, cada problema tem que ser tratado individualmente, caso a caso. As técnicas só foram desenvolvidas nos séculos XVI e XVII, com Newton e Leibniz.

A IDÉIA DE DERIVADA

Vamos falar um pouco da outra idéia fundamental do Cálculo: a derivada.

Consideremos uma grandeza variável. O problema, agora, é: como varia? Cresce rapidamente ou lentamente? Qualificando o modo de crescer (ou decrescer), já entramos na seara do Cálculo diferencial. Para isso, a idéia básica é a de proporcionalidade (entre as variações das grandezas envolvidas).

Por exemplo:

x	1	2	3	...	101	102	...	1203	1204	...	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+1$	...
y	5	10	15	...	505	510	...	6015	6020	...	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}+5$	...

Quando proporção é ensinada na 6ª série, o foco é na razão: $\frac{y}{x}$ = cte = 5 (no exemplo), ou y = 5x (foco na vertical).

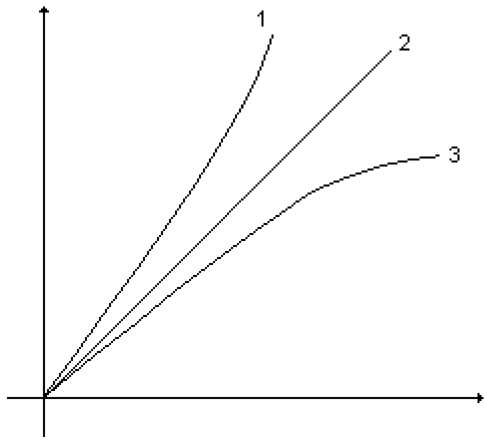
A idéia é explorar a tabela na horizontal: quando x varia de 1, y varia de 5. Essa é a marca da proporcionalidade:

(+ 1 em x) $\Rightarrow$ (mais tanto em y).

Esse "tanto" é a taxa de variação de y em relação a x. Quando é uma constante, o gráfico de y = f(x) é uma reta. Para o nosso estudo, não importam os valores iniciais, mas sim a relação entre a variação de x e a de y.

Exemplo: A pressão sobre a superfície da água é 1 atm; a cada metro de profundidade, a pressão aumenta 0,1 atm. Temos a relação y = 1 + 0,1x.

Tomando as grandezas de variação proporcional como padrão, estudamos as outras:



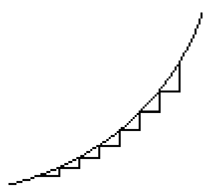
Curva 1: cresce cada vez mais rapidamente; cresce à taxa crescente.

Curva 2: cresce à taxa constante.

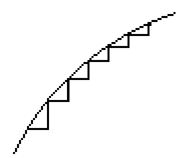
Curva 3: cresce cada vez mais lentamente; cresce à taxa decrescente.

Avaliando o comportamento da taxa, estamos falando da taxa da taxa (derivada segunda).

Taxa crescente:

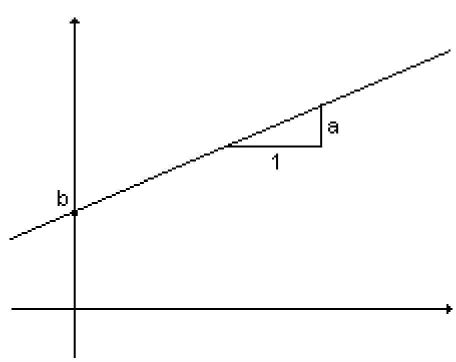


Taxa decrescente:

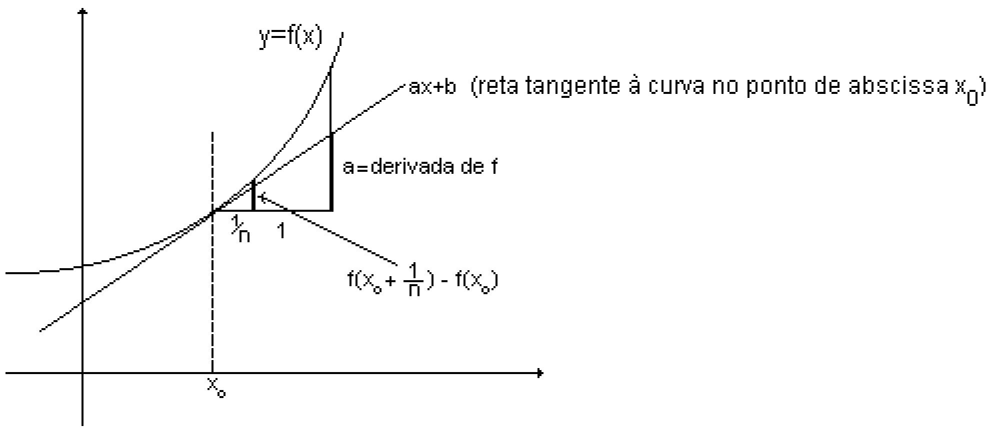


<u>Vamos ver um modo de determinar o valor aproximado da derivada de qualquer função, usando uma calculadora simples.</u>

- Se a variação é constante: f(x) = ax + b.



- Se a variação não é constante:



O que se chama de derivada de f no ponto x_0: raciocinamos como se ali o gráfico de f fosse uma reta, vemos a taxa correspondente à variação de $\frac{1}{n}$ e projetamos para 1 (multiplicando por n):

$$a \approx [f(x + \frac{1}{n}) - f(x)].n$$

Exemplo: Dada f(x) = $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 7x + 8}$, qual o valor de f\`(3)?

Pela técnica, teríamos que derivar a função f, obtendo f\`(x) e aí calcular f\`(3).
Com a calculadora, podemos determinar diretamente o valor pedido. Considerando n = 1000, teríamos:

$$f`(3) \approx [f(3{,}001) - f(3)].1000 \cong (9{,}594686707 - 9{,}591663047).1000 =$$
$$0{,}00302366 \times 1000 = 3{,}02366$$

As duas idéias – a integral e a derivada – articulam-se definitivamente em um resultado conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo, que amplia o significado do cálculo da derivada e simplifica a vida de quem quer calcular uma integral. Mas isto já é outra história.

****