

Kontrollaufgaben zur Planarbeit Zyklische Matrizen**Kontrollaufgabe 1:**

Im Boden einer Wiese befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt $e_1 = 16000$ Eier, $l_1 = 4000$ Larven, $p_1 = 1600$ Puppen und $m_1 = 500$ Maikäferweibchen. Wie ist der Bestand an Eier, Larven, Puppen und Maikäfer im darauf folgenden Jahr, wenn die folgende Tabelle zu Grunde gelegt wird?

	Eier	Larven	Puppen	Maikäfer
Eier	0	0	0	25
Larven	0,55	0	0	0
Puppen	0	0,45	0	0
Maikäfer	0	0	0,3	0

Wie ist der Bestand an Eier, Larven, Puppen und Maikäfer zwei Jahre später?

Kontrollaufgabe 2:

Die Verteilung von Maikäfereiern, Larven, Puppen und Maikäferweibchen im Boden einer Wiese ist gegeben durch den Verteilungsvektor $(\vec{p}_0)^T = (8000 | 4000 | 2000 | 800)$. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Es gilt $\vec{p}_4 = \vec{p}_0$!

Kontrollaufgabe 3:

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

zyklisch ist.

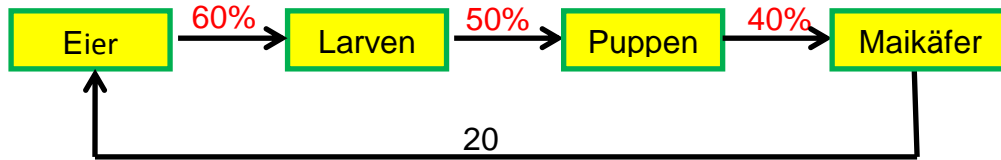
(b) Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie b so, dass die Matrix B zyklisch ist.

Kontrollaufgabe 4:

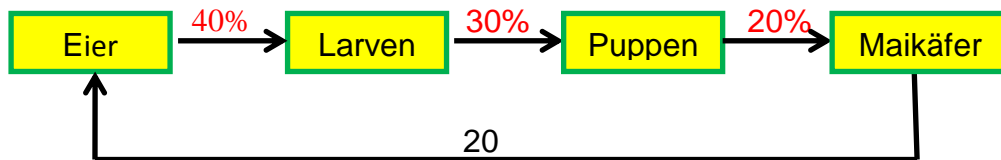
Im Boden einer Wiese befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt $e_1 = 16000$ Eier, $l_1 = 4000$ Larven, $p_1 = 1600$ Puppen und $m_1 = 500$ Maikäferweibchen. Durch günstigere Bodenbedingungen schlüpfen mehr Eier, es verpuppen sich mehr Larven und es überleben mehr Maikäfer. Ein Maikäferweibchen legt 20 Eier ab. Die Situation ist durch das folgende Diagramm gegeben:



Wie ist der Bestand an Eier, Larven, Puppen und Maikäfer in den darauf folgenden vier Jahren? Berechnen Sie den Verteilungsvektor nach drei Zyklen. Um welchen Faktor verändert sich der Bestand nach drei Zyklen?

Kontrollaufgabe 5:

Im Boden einer Wiese befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt $e_1 = 16000$ Eier, $l_1 = 4000$ Larven, $p_1 = 1600$ Puppen und $m_1 = 500$ Maikäferweibchen. Durch Verschlechterung der Bodenbedingungen schlüpfen weniger Eier, es verpuppen sich weniger Larven und es überleben weniger Maikäfer. Ein Maikäferweibchen legt 20 Eier ab. Die Situation ist durch das folgende Diagramm gegeben:



Berechnen Sie den Verteilungsvektor nach drei Zyklen. Um welchen Faktor verändert sich der Bestand nach drei Zyklen?

Lösungen zu den Kontrollaufgaben zur Planarbeit Zyklische Matrizen

Kontrollaufgabe 1:

Nach einem Jahr gibt es 12500 Eier ($500 \cdot 25$), 8800 Larven ($16000 \cdot 0,55$), 1800 Puppen ($4000 \cdot 0,45$) und 480 Maikäferweibchen ($1600 \cdot 0,3$).

Nach zwei Jahren gibt es 12000 Eier ($480 \cdot 25$), 6875 Larven ($12500 \cdot 0,55$), 3960 Puppen ($8800 \cdot 0,45$) und 540 Maikäferweibchen ($1800 \cdot 0,3$).

Kontrollaufgabe 2:

$$\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix};$$

$$\vec{p}_2 = M \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 8000 \\ 1600 \\ 400 \end{pmatrix}; \vec{p}_3 = M \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 5000 \\ 3200 \\ 400 \end{pmatrix}; \vec{p}_4 = M \cdot \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix} = \vec{p}_0.$$

Kontrollaufgabe 3:

$$(a) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0,4 \cdot b & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot b \end{pmatrix}.$$

Für $b = 0,25$ ist B zyklisch.

Kontrollaufgabe 4:

$$\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 9600 \\ 2000 \\ 640 \end{pmatrix};$$

$$\vec{p}_2 = M \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 12800 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix}; \vec{p}_3 = M \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 16000 \\ 7680 \\ 3200 \\ 1920 \end{pmatrix}; \vec{p}_4 = M \cdot \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 38400 \\ 9600 \\ 3840 \\ 1200 \end{pmatrix} = 2,4 \cdot \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nach 3 Zyklen: } 2,4^3 \cdot \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 221184 \\ 55296 \\ 22118,4 \\ 6912 \end{pmatrix}. \text{ Der Faktor ist } 2,4^3 = 13,824.$$

Nach vier Jahren gibt es 38 400 Eier, 9 600 Larven, 3840 Puppen und 1200 Maikäferweibchen.

Nach drei Zyklen gibt es 221 184 Eier, 55 296 Larven, 22 118 Puppen und 6 912 Maikäferweibchen.

Kontrollaufgabe 5:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}; M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0,12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,06 & 0 & 0 \end{pmatrix}; M^4 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,48 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nach 3 Zyklen: } 0,48^3 \cdot \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1769,47 \\ 442,37 \\ 176,95 \\ 55,30 \end{pmatrix}. \text{ Veränderungsfaktor: } 0,48^3 \approx 0,111.$$

Nach drei Zyklen gibt es 1769 Eier, 442 Larven, 177 Puppen und 55 Maikäferweibchen.