Esercizio 1. Determinare un'equazione parametrica e cartesiana delle rette seguenti del piano
(a) Passante per il punto $C(2,3)$ e parallela al vettore $v_r = (-1,2)$.
(b) Passante per i punti $A(1,2)$ e $B(-1,3)$.
(c) Di equazione Cartesiana $y = 2x + 5$. Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

SOLUZIONE:

(a) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \ (x,y) = C + v_r t = (2,3) + (-1,2)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana ottenendo un'equazione che leghi x e y, ovvero eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} t = 2 - x \\ y = 3 + 2(2 - x) \end{cases} \qquad \Rightarrow \ 2x + y - 7 = 0 \ \Rightarrow \ y = -2x + 7$$

(b) La direzione della retta è $v_r = B - A = (-2,1)$, quindi

$$r: \ (x,y) = A + v_r t = (1,2) + (-2,1)t \ \Rightarrow \ r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare t come nel punto (a):

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - 2(y - 2) \\ t = y - 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \ x + 2y - 5 = 0 \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

(c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro t, ottenendo

$$r: \ \begin{cases} x = t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbb{R} \ \Rightarrow \ r: \ (x,y) = (0,5) + (1,2)t$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x,y) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow P(0,5).$$

Oppure assegnando il valore 1 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \Rightarrow Q(1,7).$$

$\square$

Esercizio 2. Verificare che le equazioni $r_1: \ (1,-3) + (2,-2)t$ e $r_2: \ (3,-5) + (-1,1)s$ descrivono la stessa retta.

SOLUZIONE:

La retta r_1 ha direzione $v_1(2,-2)$ e la retta r_2 ha direzione $v_2 = (-1,1)$. Notiamo che i due vettori v_1 e v_2 hanno differente modulo e verso, ma stessa direzione (infatti $v_1 = -2v_2$), quindi anche le rette r_1 e r_2 hanno la stessa direzione ovvero sono parallele. Ponendo $t = 0$ vediamo che la retta r_1 passa per il punto $A(1,-3)$, basta ora verificare che tale punto appartiene anche a r_2. Infatti il sistema

$$\begin{cases} 3 - s = 1 \\ -5 + s = -3 \end{cases}$$

ha soluzione $s = 2$, quindi A appartiene anche alla retta r_2. Infine r_1 e r_2 sono due rette parallele con il punto A in comune, ovvero sono coincidenti.

$\square$