Cálculo Diferencial e Integral III – Aula 2 (02 Ago 2017)

QUIZ (aula ao vivo) – Professor Azuaite Schneider

Questão 1

Considere a sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \left\{\frac{x^3}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Observando o comportamento da sequência quando o valor de n tende ao infinito é possível conjecturar que $\{\boldsymbol{f_n}\}$:

A) diverge, tanto uniformemente quanto pontualmente.
B) converge pontualmente para a função $f(x) = x^3$, mas não converge uniformemente.
C) converge pontualmente para a função $f(x) = 0$, mas não converge uniformemente.
D) converge pontual e uniformemente para a função $f(x) = x^3$.
E) converge pontual e uniformemente para a função $f(x) = 0$.

Resposta correta: C.

Feedback: Para qualquer valor $x_0 \in \mathbb{R}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_0)^3}{n} = (x_0)^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = (x_0)^3 \cdot 0 = 0.$$

Portanto a sequência de funções converge pontualmente para a função $f(x) = 0$.

Geometricamente você pode perceber, ao aumentar o valor de n, que a sequência de funções se aproxima da eixo x. Mas percebe também que independentemente do valor de $\varepsilon > 0$ que você escolher, não conseguirá fazer os termos da sequência estarem completamente dentro da faixa definida por $-\varepsilon < y < \varepsilon$, então a sequência não converge uniformemente.

Questão 2

Considere a sequência de funções $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1 + nx}.$$

A respeito da convergência desta sequência de funções, analise as seguintes afirmações:

(I) A sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0. \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

(II) A sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

(III) A sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é formada por funções descontínuas em $x_0 = -\frac{1}{n}$.

É correto o que se afirma em

A) I, apenas.
B) II, apenas.
C) I e II, apenas.
D) I e III, apenas.
E) I, II, III.

Resposta correta: D.

Feedback: Como a função cosseno é sempre limitada por $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, segue que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, temos que a seguinte desigualdade:

$$-1 \leq \cos(nx_0) \leq 1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{1+nx_0} \leq \frac{\cos(nx_0)}{1+nx_0} \leq \frac{1}{1+nx_0}$$

Como as sequências $\left\{-\frac{1}{1+nx_0}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{1+nx_0}\right\}$ convergem claramente para zero, quando n tende ao infinito, pelo Teorema do Confronto concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(nx_0)}{1+nx_0} = 0.$$

Quando $x_0 = 0$ a sequência se torna a sequência constante $\left\{\frac{\cos(0)}{1}\right\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$, e portanto, em $x_0 = 0$, a sequência converge para 1.

Portanto a sequência de funções converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0. \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Note que essa função é descontínua em zero.

Geometricamente você pode perceber que, ao aumentar o valor de n, qualquer ponto P fixado se aproxima da eixo x. Mas percebe também que independentemente do valor de $\varepsilon > 0$ que você escolher, não conseguirá fazer os termos da sequência estarem completamente dentro da faixa definida por $-\varepsilon < y < \varepsilon$, então a sequência não converge uniformemente. Outra forma de ver isto é pensar sobre o seguinte resultado visto na aula:

Proposição (Continuidade). Se uma sequência de funções contínuas converge uniformemente, então o limite é também uma função contínua.

Note que cada termo da sequência é uma função descontínua quando o numerador for igual a zero, ou seja, $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1+nx}$ é descontínua nos pontos em que $1 + nx = 0$, ou seja, isolando x, concluímos que os termos da sequência são funções descontínuas em $x = -\frac{1}{n}$ (Isso inclusive mostra que a afirmação (III) é verdadeira).

Mas se as funções f_n são descontínuas apenas em $-\frac{1}{n}$, isso quer dizer que são contínuas em zero. Mas poderia uma sequência de funções contínuas em zero convergir para uma função descontínua em zero??? Pela Proposição que enunciei acima a resposta é NÃO. Portanto a afirmação (II) é falsa.

Outra forma de perceber que a sequência não converge uniformemente é observar o gráfico dos termos quando n cresce muito.

Questão 3

Considere a série de potências centrada em zero

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

O raio de convergência e o intervalo de convergência (sem se preocupar com os extremos do intervalo) são, respectivamente:

A) Raio de convergência: 1; intervalo de convergência: (-1,1).

B) Raio de convergência: -1; intervalo de convergência: (-1,1).

C) Raio de convergência: 1; intervalo de convergência: (0,2).

D) Raio de convergência: 1; intervalo de convergência: (0,1).

E) Raio de convergência: 2; intervalo de convergência: (-1,1).

Resposta correta: A.

Feedback: Manipulando o applet apenas é fácil perceber qual o intervalo de convergência e, consequentemente, o raio de convergência. Mas como eu comentei, na prova vocês não poderão usar o GeoGebra e, portanto, precisa saber calcular.

Podemos calcular o raio de convergência de duas formas, ambas provindas do Teste da Razão. Para a primeira, podemos usar o termo geral como sendo

$$a_n = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

(Repare que nesse termo geral a potência de x está inclusa.)

Aplicando o Teste da Razão, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)+1}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = |x|$$

O Teste da Razão nos diz que a série converge se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, então temos que a série de potência só vai convergir se

$$|x| < 1 \;\; \Rightarrow \; -1 < x < 1,$$

de onde já é imediato que o raio de convergência é 1 e o intervalo é $(-1,1)$.

Outra forma, equivalente, é usando a fórmula que existe para determinar o raio de convergência, que é aplicar um limite parecido com o Teste da Razão, mas considerando o termo geral a_n sem a parte da potência de x.

O termo geral a_n neste caso é

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

E a fórmula do raio de convergência é

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Portanto,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Em conclusão o raio é $R = 1$ e como a série de potências está centrada em 0, temos que o intervalo de convergência é $(-1,1)$.

Note que aqui não estamos preocupados em saber se a série converge em -1 e 1.

Questão 4

Considere a série de potências dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{nk^n}, \text{onde } k \in \mathbb{R} \text{ é uma constante.}$$

Para quais valores de k teremos que o intervalo de convergência da série de potências acima seja o intervalo (-5,3)?

A) k=-1 e k=1.

B) k=-2 e k=2.

C) k=-3 e k=3.

D) k=-4 e k=4.

E) k=-5 e k=5.

Resposta correta: C.

Feedback: Note que o intervalo $(-5,3)$ tem "tamanho" 8. Já sabemos que a série é centrada em $a = -1$. Portanto, é óbvio que o raio é 4, pois a distância do -5 até o -1 é 4 e do -1 até o 3 também é 4.

Mas pela fórmula para encontrar o raio, teríamos

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, onde\ a_n = \frac{1}{nk^n}.$$

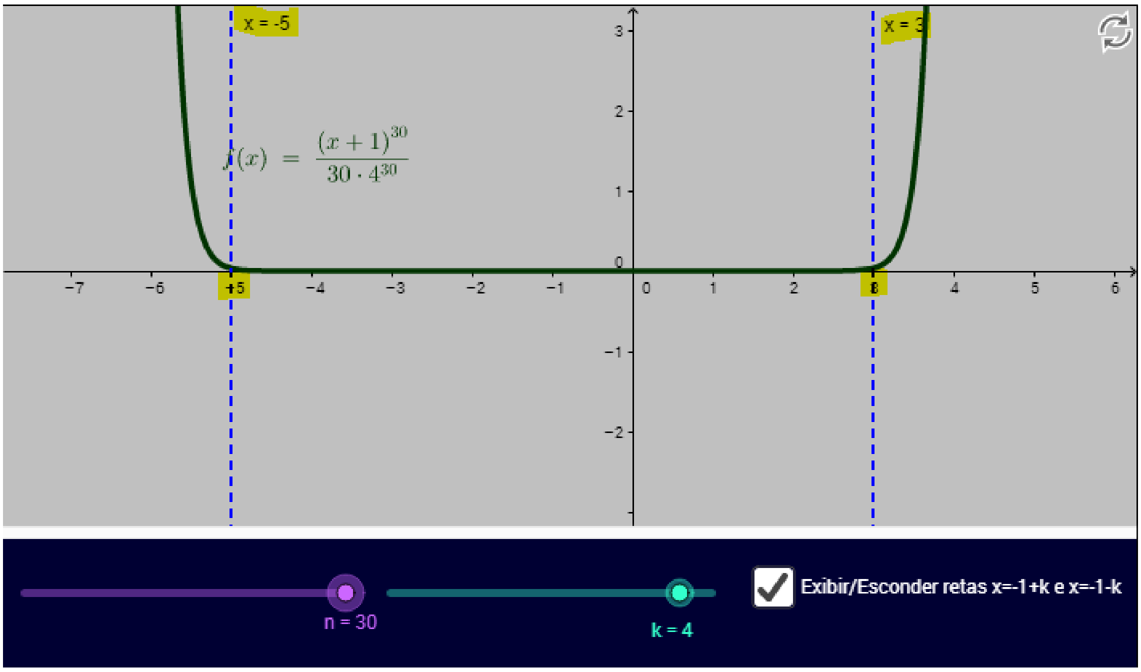
Logo,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{nk^n}}{\frac{1}{(n+1)k^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)k^{n+1}}{nk^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left|\frac{k^{n+1}}{k^n}\right|$$

$$= |k| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |k|.$$

Como já sabemos que $R = 4$, a conclusão é que $|k| = 4$, e portanto, $k = \pm 4$.

Se você escolher $k = \pm 4$, no applet, verá que a função ficará perto do eixo x somente no intervalo $(-5,3)$, como você pode ver na imagem a seguir:



x = -5
x = 3
$f(x) = \frac{(x+1)^{30}}{30 \cdot 4^{30}}$
n = 30
k = 4
Exibir/Esconder retas x=-1+k e x=-1-k

Questão 5

Se f tem uma representação (expansão) em série de potências em torno de a_0, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a_0)^n, \qquad |x - a_0| < R, \text{onde R é o intervalo de convergência,}$$

então os coeficientes c_n são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!}$$

A função $f(x) = e^x$ pode ser representada como uma série de potências de raio de convergência infinito. Levando em consideração o que foi comentado acima, **qual das opções abaixo é a correta representação de $f(x) = e^x$ em série de potências em torno de $a_0 = 2$?**

$$\textbf{(I)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n!} \quad \textbf{(II)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (x-2)^n}{n!} \quad \textbf{(III)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \quad \textbf{(IV)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{e^n n!}$$

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) Nenhuma das alternativas.

Resposta correta: B

Feedback: O primeiro passo é calcular as derivadas de $f(x) = e^x$, que é algo simples:

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

$$f'''(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

Portanto,

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a_0)}{n!} (x - a_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n.$$

Seguindo as instruções do applet você consegue ver que a aproximação vale e, portanto, a correta é a expansão dada em (II).