Série 3 - Les nombres rationnels

Rappel sur les fractions

Le résultat de la division « 5 : 2 » est appelé le **quotient** de 5 par 2.

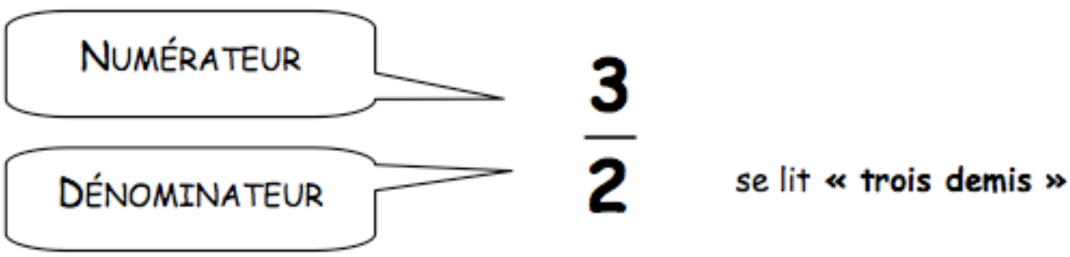
On peut effectuer la division afin d'obtenir son **écriture décimale** 5 : 2 = **2,5**

Mais on peut également ne pas le calculer.
On garde alors son **écriture fractionnaire** $5 : 2 = \frac{5}{2}$

L'écriture fractionnaire représentant la division de deux nombres **entiers** est appelée une **fraction**.

Dans une fraction, le dividende (le nombre d'en haut) s'appelle le **numérateur** et le diviseur (le nombre d'en bas) s'appelle le **dénominateur**.

Exemple :

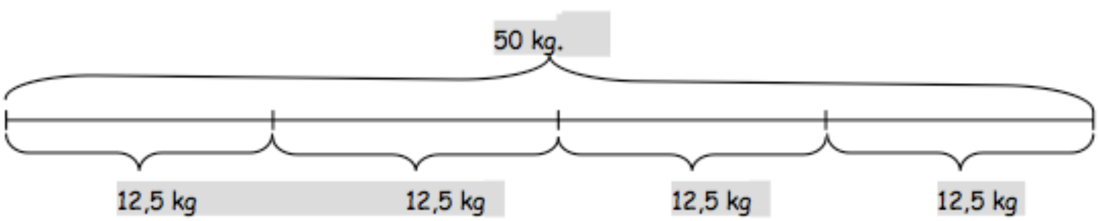


Fraction opérateur

On peut utiliser les nombres pour opérer sur des grandeurs.
Exemple : Le triple de 6 cm est 3 x 6 = 18 cm

De la même manière, on utilise les fractions pour opérer sur des quantités.
Exemple :

$\frac{3}{4}$ de 50 kg, c'est $\frac{3}{4} \times 50 = \frac{3 \cdot 50}{4} = 37{,}5$ kg.



Dans cette situation, on distingue deux notions : - la fraction : $\frac{3}{4}$

- l'unité de référence : 50 kg.

L'unité de référence est la quantité qui va être partagée en un nombre égal de parts.

Le dénominateur indique le nombre de parts égales dans lesquelles on a partagé l'unité de référence.
Par conséquent, il ne peut pas être égal à zéro.

Le numérateur indique le nombre de morceaux qui vont être pris en considération après le partage.

Rappel : Le numérateur et le dénominateur sont toujours des nombres entiers

Addition et soustraction des fractions

• Lorsque **les fractions ont le même dénominateur**, les parts ont toutes la même dimension et il suffit donc d'additionner (ou de soustraire) les numérateurs entre eux.

Exemple :

$$\frac{7}{11} + \frac{5}{11} = \frac{12}{11}$$

$$\frac{7}{11} - \frac{5}{11} = \frac{2}{11}$$

• Lorsque les dénominateurs sont différents, par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ il faut trouver **un dénominateur** commun.

Le dénominateur commun est un multiple commun des deux dénominateurs.
Le plus petit des multiples commun est le PPCM.
Dans notre exemple, un des dénominateurs communs est le PPCM(4, 3) = 12.

Donc :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

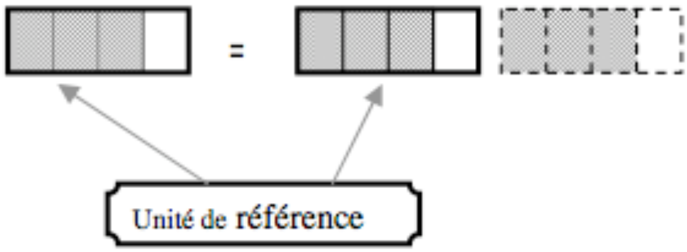
$$\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} =$$

$$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

La multiplication des fractions

Le double de $\frac{3}{4}$ s'écrit $2 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$, il est égal à $\frac{6}{4}$.

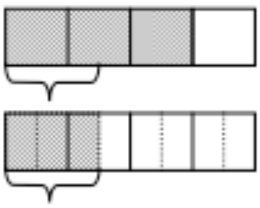
En effet : 2 ×



De même, la moitié de $\frac{3}{4}$ s'écrit $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, il est égal à $\frac{3}{8}$

En effet : la moitié de

c'est $\frac{3}{8}$



Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Remarque : En général, le résultat d'une multiplication de fractions n'est pas une fraction irréductible. Par convention, on donne le résultat sous forme irréductible.

Exemple :

Calcule le double de $\frac{3}{4}$: $2 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{1 \times 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Calcule les $\frac{2}{3}$ de $\frac{9}{4}$: $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{2 \times 9}{3 \times 4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Pour multiplier deux fractions contenant **des grands nombres**, il est plus avantageux de :
- décomposer chaque nombre
- simplifier le produit
- effectuer la multiplication.

Exemple :

$$\frac{60}{15} \bullet \frac{75}{36} = \frac{\overbrace{2\cdot2\cdot3\cdot5}^{60}\cdot\overbrace{3\cdot5\cdot5}^{75}}{3\cdot5\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3} = \frac{\overbrace{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}^{1}\cdot5\cdot5}{\underbrace{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}_{1}\cdot3} = \frac{1\bullet5\bullet5}{1\bullet3} = \frac{25}{3}$$

L'exponentiation des fractions

Rappel :

$$a^n = \underbrace{a \bullet \ldots\ldots\ldots \bullet a}_{n \text{ facteurs}}$$

Pour élever une fraction à la puissance n, on multiplie la fraction par elle-même n fois.

Exemple :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \bullet \frac{2}{5} \bullet \frac{2}{5} = \frac{2\bullet2\bullet2}{5\bullet5\bullet5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Propriété :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Les racines :

Rappel : $a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b}$ où a est un nombre positif.

Pour les fractions :

Pour toute fraction positive $\frac{a}{b}$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$$

Pour toute fraction $\frac{a}{b}$:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \frac{a}{b}$$

Exemples :

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{(-27)}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{(-3)}{2} = -\frac{3}{2}$$

L'inverse d'une fraction :

L'inverse d'un nombre n est le nombre m tel que n • m = 1.

L'inverse d'un nombre entier n est la fraction $\frac{1}{n}$

Car :

$$n \bullet \frac{1}{n} = \frac{n}{1} \bullet \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$

Exemples : l'inverse de la fraction $\frac{4}{7}$ est la fraction $\frac{7}{4}$.

l'inverse de la fraction $-\frac{4}{7}$ est la fraction $-\frac{7}{4}$.

La division des fractions :

Pour diviser une fraction $\frac{a}{b}$ par une fraction $\frac{c}{d}$,

on multiplie le dividende $\frac{a}{b}$ par l'inverse du diviseur $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c} = \frac{a \bullet d}{b \bullet c}$$

Exemple :

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \bullet \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

$$\frac{2}{5} \div 5 = \frac{2}{5} \bullet \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

L'ordre des

<u>opérations :</u>

Lorsque, dans une suite d'opérations, il y a des fractions et des nombres décimaux, il est souvent plus avantageux de :
- Transformer tous les nombres en écriture fractionnaire,
- Simplifier les fractions le plus rapidement possible.

On termine ensuite le calcul en respectant la hiérarchie habituelle :
- On commence par les calculs qui se trouvent dans les parenthèses, s'il y a plusieurs parenthèses, de l'intérieur vers l'extérieur,
- On calcule toutes les puissances et les racines,
- On effectue les multiplications et les divisions dans le sens de la lecture (de gauche à droite),
- On termine par les additions et les soustractions, dans le sens de la lecture (de gauche à droite).

Exemple :

1)
$$\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1,2 =$$
$$\frac{3}{5} - \frac{1}{8} \times \frac{6}{5} =$$
$$\frac{3}{5} - \frac{1 \times 3}{4 \times 5} =$$
$$\frac{12}{20} - \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$$

2)
$$7 - 5 \times \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 1 =$$
$$7 - 5 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + 1 =$$
$$7 - 5 \times \frac{4}{4} + 1 =$$
$$7 - 5 + 1 = 3$$

3)
$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{15}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{3}{3}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$$