

# Análisis de movimiento circular y oscilatorio a partir de videos como motivación para el estudio de las funciones circulares

Del Río, Laura<sup>1,2</sup>; Berini, Fabián<sup>2,3</sup> y Manceñido, Mónica<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>UIDET IMApEC – Facultad de Ingeniería – UNLP

<sup>2</sup>Instituto GeoGebra de La Plata; <sup>3</sup>GECICNaMa

[laura.delrio@ing.unlp.edu.ar](mailto:laura.delrio@ing.unlp.edu.ar), [fabidam10@yahoo.com.ar](mailto:fabidam10@yahoo.com.ar), [mance@fisica.unlp.edu.ar](mailto:mance@fisica.unlp.edu.ar)

**Eje:** Enseñanza educación y conocimiento

**Tipo de comunicación:** experiencia fundamentada

**Abstract:** En el presente trabajo, se comparte una experiencia áulica realizada con el fin de articular el estudio de un tema de Matemática (funciones circulares) con la Cinemática del movimiento circular u oscilatorio. Para el desarrollo de la misma, se utilizaron teléfonos celulares para capturar videos de los sistemas en movimiento y dos programas de uso libre, Tracker y GeoGebra, para el análisis de los mismos. Se concluye que la experiencia enriqueció el trabajo en el aula de Matemática, posibilitando la discusión de ciertos aspectos que no se abordan habitualmente.

**Palabras clave:** Enseñanza de la Matemática – Articulación Matemática/Física – TIC y educación – Software educativo – Videos

## Introducción

La Matemática, y más en particular el Cálculo, guarda una estrecha relación histórica y conceptual con la Física. Sin embargo, la segmentación de saberes que usualmente se produce en el currículum quiebra estos vínculos y dificulta que los estudiantes los comprendan y aprovechen para mejorar su aprendizaje. En el presente trabajo, se describe una experiencia de articulación entre Física y Matemática realizada con alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. En la misma, se utiliza *software* libre, Tracker y GeoGebra, para analizar movimiento oscilatorio y circular como motivación para el estudio de las funciones circulares.

## **Marco teórico**

La Física es una ciencia natural y experimental que se sirve de la Matemática para elaborar modelos que apunten a describir, explicar y predecir el comportamiento de los objetos. Los científicos e ingenieros utilizan a menudo computadoras para obtener y analizar datos de la realidad, así como también para realizar simulaciones empleando modelos matemáticos, a fin de analizar la validez y limitaciones de estos. Es por esto que se recomienda incluir estas herramientas también en las prácticas de enseñanza de la física (Wolfgang, Esquembre y Barbato, 2011).

Por otro lado, resulta de interés didáctico el trabajo en el aula de Matemática utilizando gráficos, ya que es parte importante del lenguaje científico, y su aprendizaje conlleva múltiples dificultades. En particular, Joselevich et al (2014) señalan la confusión, habitual entre los alumnos, “entre el gráfico como representación de los datos experimentales y el gráfico de los valores esperados según un determinado modelo teórico”, indicando que en este sentido programas como GeoGebra “permiten un acercamiento sumamente intuitivo a la aproximación de datos con funciones matemáticas” (p.46).

## **Contexto de desarrollo de la experiencia**

El curso en el que se desarrolló la experiencia es un curso para alumnos recursantes de la asignatura Matemática A, correspondiente al primer cuatrimestre de todas las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. Estos grupos han sido caracterizados en múltiples trabajos por parte de docentes-investigadores de nuestra facultad. Por ejemplo, en Altamirano et al (2013) se expresa que estos alumnos “‘adelantan’ y tienen tendencia a creer que ‘ya saben’ y muchas veces ‘saltean’ ejercitaciones, lecturas o razonamientos, sin discernir lo que realmente saben de lo que no” (p. 215). En Tori et al (2008) se agrega que “Asimismo parece haber una ‘fatiga’ en el contacto con el material debido a la sobreexposición”.

Es por esto que continuamente se piensan estrategias alternativas para estos grupos de alumnos. En esta oportunidad, se pensó en diseñar un trabajo práctico que los alumnos pudieran realizar en sus casas, en equipo, que les permita estudiar un fenómeno de la realidad en el cual se requiera utilizar un

modelo matemático vinculado con los temas de la asignatura. El tema seleccionado fue *funciones circulares* y el fenómeno, mediante el que se lo estudió fue movimiento *circular y oscilatorio*, tema que profundizarán luego en la asignatura Física I.

### **Antecedentes**

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, se vienen llevando a cabo diversas actividades de articulación entre Física y Matemática (Torroba, Devece, Trípoli y Aquilano, 2017; Costa, Torroba y Devece, 2013) que pretenden restablecer el vínculo entre ambas asignaturas con el propósito de contribuir con un mejor aprendizaje de los estudiantes. Estas actividades consisten en la realización de experiencias de Física en el aula de Matemática, utilizando sensores y dispositivos de laboratorio, a fin de contrastar los modelos matemáticos con datos experimentales. Los resultados obtenidos resultan alentadores, tanto desde el punto de vista actitudinal de los alumnos como desde el punto de vista de los aprendizajes de los conceptos matemáticos, al poder vincularlos con fenómenos reales.

Para la experiencia que se relata en el presente trabajo, se tomaron como base las realizadas anteriormente, pero se decidió utilizar para la toma de datos el programa Tracker, ya que se pretendía proponer a los alumnos la realización de un trabajo domiciliario, para el cual no se dispondría de los dispositivos utilizados en aquellas oportunidades.

Para la integración de este programa, se consultó la literatura existente y se encontraron múltiples trabajos que analizan el funcionamiento del mismo en el aula. Por ejemplo, Hitt (2014) propone la integración de Tracker para la enseñanza del cálculo, ya que considera a los videos como una herramienta importante para analizar fenómenos físicos y lo que permite este programa es la toma de datos a partir de los mismos. También se recomienda el tratamiento de estos datos utilizando el *software* GeoGebra para la “búsqueda de modelos matemáticos, ya sean desde un punto de vista, geométrico, gráfico y algebraico” (p. 12).

De acuerdo con Paricio (2014), los *applets* y los videos permiten el análisis de la evolución temporal de un sistema físico, aspecto difícil de tratar utilizando únicamente imágenes estáticas. Esta autora indica que Tracker es una

excelente herramienta para el aprendizaje de la Cinemática, ya que permite a los alumnos “comprender por sí mismos la naturaleza de los movimientos, participando activamente en el aprendizaje y desarrollando su capacidad de reflexión y creatividad” (p. 22).

## **Desarrollo**

Del diseño de la actividad participaron los tres autores de este trabajo, dos de ellos docentes de Matemática (una de ellas a cargo del curso en cuestión) y una Licenciada en Física, quien participó además del taller inicial con los alumnos, que se desarrolló para introducir el uso del programa Tracker a los alumnos. Dicho taller se realizó durante el horario de clase, en el cual la docente a cargo analizó un video frente a los alumnos utilizando un proyector. El video empleado mostraba la caída de un auto de juguete por una pista inclinada. Se preguntó a los alumnos qué elementos debían definirse para poder estudiar la posición en función del tiempo. Algunos alumnos propusieron indicar la escala espacial, otros, un origen desde el cual indicar la posición, otros, la escala temporal. La docente mostró cómo indicar la escala espacial al programa a partir del conocimiento de las dimensiones de uno de los objetos en pantalla (en este caso, se conocía la longitud de la pista por la que caía el auto), y cómo colocar un sistema de ejes cartesianos como sistema de referencia. Este último se posicionó con origen en el punto de partida del auto y el semieje  $x$  positivo en dirección de la caída (Ver Figura 1). En cuanto a la escala temporal, se indicó que el programa de alguna manera obtenía la información de la cantidad de cuadros por segundo en la que estaba tomado el video y utilizaba esa información para establecer la escala temporal.

Antes de hacer correr el programa para obtener los datos de la posición en función del tiempo, la docente pidió a los alumnos que predigan cómo se vería la gráfica de  $x(t)$  y de  $y(t)$  para la configuración descrita anteriormente, concluyendo que  $x(t)$  sería una parábola con vértice en el origen y ramas hacia arriba, mientras que la  $y(t)$  es aproximadamente constante y nula.

Luego, tomando como referencia las experiencias relatadas en Torroba *et al* (2017) se propuso cambiar el sistema de referencia, posicionando el origen de coordenadas en el punto final del recorrido del auto, con el eje  $x$  en igual

dirección y sentido que en el caso anterior y, por último, invirtiendo el sentido del eje x.

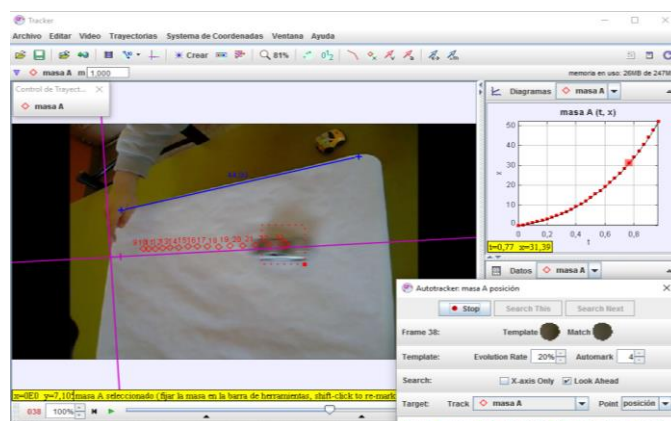


Figura 1 – Imagen del análisis realizado en la presentación inicial.

Los datos obtenidos por el programa se llevaron luego al programa GeoGebra para encontrar una fórmula analítica que permita describir la posición en función del tiempo.

A continuación, se solicitó a los estudiantes que realicen un trabajo práctico utilizando las herramientas informáticas presentadas. El trabajo consistió en: filmar un video de un objeto que realice un movimiento circular u oscilatorio. Para ello se sugirió utilizar el teléfono celular. Obtener con el programa Tracker los datos de la posición en función del tiempo. En este caso, al tratarse de un movimiento bidimensional, se obtendrían dos funciones:  $x(t)$  e  $y(t)$  de la forma  $Asen(Bx+C)+D$ . Para obtener los ajustes, no se sugirió utilizar los comandos implementados en el programa, dado que estos funcionan como si se tratase de “cajas negras”. En su lugar, se sugirió ingresar una función genérica con parámetros asociados a *deslizadores* y utilizar un criterio visual para determinar la curva que mejor se ajuste a la nube de datos. De esta manera, no se obtiene el mejor ajuste desde un punto de vista matemático, pero se permite a los alumnos reflexionar acerca de qué ocurre con la gráfica de la función al aumentar o disminuir la amplitud, la frecuencia y la fase.

Una vez obtenidos los ajustes de las funciones, los alumnos debían responder: *¿Cómo interpreta el valor del parámetro A en el contexto del sistema estudiado? ¿Y los parámetros, B, C y D?*

Los trabajos fueron realizados durante 3 semanas, mientras se continuaron desarrollando los contenidos de la materia, con discusión con la docente tanto en clase como por correo electrónico.

Se presentaron 6 trabajos, realizados individualmente o por equipos de dos personas. Los sistemas analizados fueron: ventiladores, tocadiscos, un tren de juguete con pista circular, un péndulo y un video simulando un movimiento circular realizado mediante el programa AfterEffects.

En líneas generales, la respuesta de por parte de los alumnos fue positiva. Alrededor de un tercio de los alumnos que cursan activamente la materia decidieron realizar la actividad (que era opcional) y todos ellos la completaron satisfactoriamente, con un alto grado de entusiasmo.

En relación a la parte técnica de la actividad (uso de las herramientas informáticas propuestas), no se presentaron dificultades, lo cual resulta muy positivo ya que permite enfocar la atención a las discusiones disciplinares previstas.

Con respecto a la filmación de los videos, todos los alumnos lograron capturar el movimiento del sistema elegido y ajustar las curvas solicitadas, las cuales resultaron razonables en casi todos los casos, a excepción de uno, en el cual se filmó un ventilador cuya velocidad angular no era constante, razón por la cual la curva obtenida no se aproximaba a una sinusoidal (Ver Figura 2).

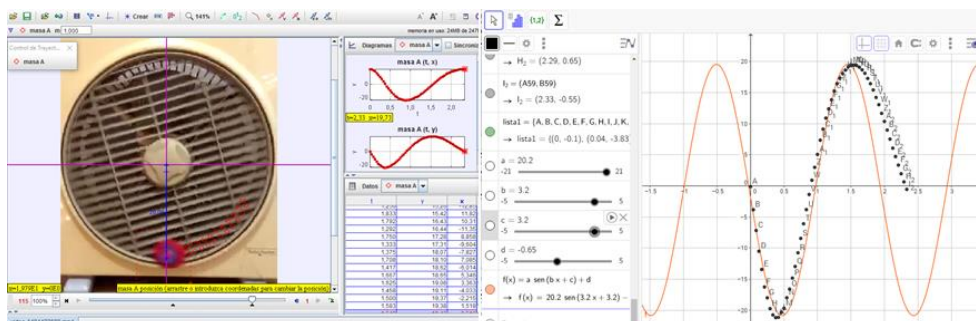


Figura 2 - Análisis del movimiento de un ventilador con velocidad angular variable y su ajuste.

En cambio la interpretación de los parámetros ajustados y su aplicación al contexto concreto sí presentó dificultad. Los alumnos en sus primeras versiones de los trabajos interpretaban los parámetros en relación a la gráfica “matemática” pero no en la situación “física”. A modo ilustrativo, se comparte a continuación la respuesta de uno de los alumnos (Ver Figura 3).

En particular, cabe destacar la confusión entre lo horizontal y lo vertical en las gráficas de las funciones y en la realidad (incisos c y d, Figura 3): en la gráfica de la función, el eje horizontal representa la variable “tiempo”, de manera que el desplazamiento horizontal en este caso, debería vincularse la elección del

momento inicial, mientras que un corrimiento vertical en la gráfica se corresponde con una diferente elección en la posición del origen de coordenadas.

**Variables de la función**

**a:** El valor  $a$  en la función representa la amplitud, que es la distancia entre el punto medio de la onda y el punto más lejano que llega a alcanzar la onda, también se puede pensar como el valor máximo del seno

**b:** La variable  $b$  es la frecuencia, que representa la cantidad de repeticiones de la función en un intervalo dado, en este caso el intervalo representa el tiempo por lo que la definición será la cantidad de repeticiones de la función en base al tiempo que transcurre

**c:** La variable  $c$  es el desplazamiento de la función sobre el eje X (desplazamiento horizontal)

**d:** La variable  $d$  es el desplazamiento de la función sobre el eje Y (desplazamiento vertical)

Figura 3 – Ejemplo de respuesta de un alumno.

También se encontró la existencia de una confusión generalizada entre el concepto de período y frecuencia. La relación entre estas cantidades se trabajó en clase, sin embargo se encontró que muchos de los alumnos identificaban entre sí estos dos conceptos (Ver Figura 4).

B: el período o frecuencia (es cada cuanto se repite la porción principal de la gráfica, para las funciones seno y coseno. Esto sucedía cada 2,4, es decir, cada 2,4 la gráfica de la función se repite en el plano de ejes cartesianos)

Figura 4 - Ejemplo de respuesta de un alumno.

Todas estas cuestiones se pudieron discutir con la docente y se considera que enriquecieron el trabajo en relación a las funciones circulares. Los alumnos evidenciaron tener conocimiento en relación a cómo los parámetros afectan a la gráfica, pero tuvieron dificultades para interpretar la implicancia de estos en el sistema real estudiado. La propuesta de esta actividad habilitó estas discusiones en el aula permitiendo mostrar cómo la Matemática se vincula con la realidad, al modelizarla e interpretarla.

### Conclusiones y trabajos a futuro

La principal conclusión de este trabajo es que este tipo de actividades son necesarias en el aula de Matemática, dado que para los alumnos resulta difícil encontrar, por sí solos, relación entre conceptos estudiados en clase y los fenómenos que éstos pudieran describir. Además, es importante destacar la necesidad de continuar profundizando y mejorando esta propuesta, ya que trabajar conceptos interdisciplinariamente, da lugar a nuevos análisis y discusiones, que sin duda favorecen la interpretación de los mismos.

Otro aspecto relevante a mencionar es que el uso en sí mismo de las herramientas informáticas propuestas no supuso grandes dificultades a los alumnos: Por un lado, una breve exposición durante la clase acompañada de un breve instructivo, entregado a los fines de poder utilizarlas, permitieron desarrollar la actividad con éxito. Por último, la inclusión de herramientas tecnológicas, nunca deben posicionarlas en el centro de la actividad. Estas deben generar y habilitar discusiones que resulten enriquecedoras desde el punto de vista disciplinar.

### **Referencias bibliográficas**

Altamirano, N., Bertero, F., Di Domenicantonio, R. M., García, M., Langoni, L., & Trípoli, M. (2013). Experiencia en un curso de alumnos recursantes de Matemática. II Jornadas ITE. Fac. de Ingeniería UNLP.

Costa, V., Torroba, P. & Devece, E. (2013) Articulación en la enseñanza en carreras de ingeniería: el movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 7(3), pp. 350-356.

Hitt, F. (2014) Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: La derivada en ambientes TICE. *Revista AMIUTEM*, 2(2), pp. 1-19.

Joselevich, M.J. et al (2014) Ciencias naturales y TIC: orientaciones para la enseñanza. 1ª ed. ANSES, CABA.

Paricio Muñoz, S. (2014) Análisis de las dificultades en la comprensión de la Cinemática en Bachillerato. Evaluación del uso de Tracker para facilitar el aprendizaje. Trabajo de fin de máster. Director: Vicente Martorell, J.J. Universidad de La Rioja, España.

Tori, C., Trípoli, M. d. I. M., Badano, V., & Vallejo, D. (2008). Dos poblaciones de recursantes de Cálculo diferencias en primer año de Ingeniería. Comunicación presentada en Primeras Jornadas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas, Quilmes.

Torroba, P.; Devece, E.; Trípoli, M.; Aquilano, L. (2017) Una propuesta didáctica que articula contenidos de matemática y física. Cuartas Jornadas de Investigación, Transferencia y Extensión, La Plata.

Wolfgang, C.; Esquembre, F.; Barbato, L. (2011) Open source physics. *Science* 334 (6059), pp. 1077-1078