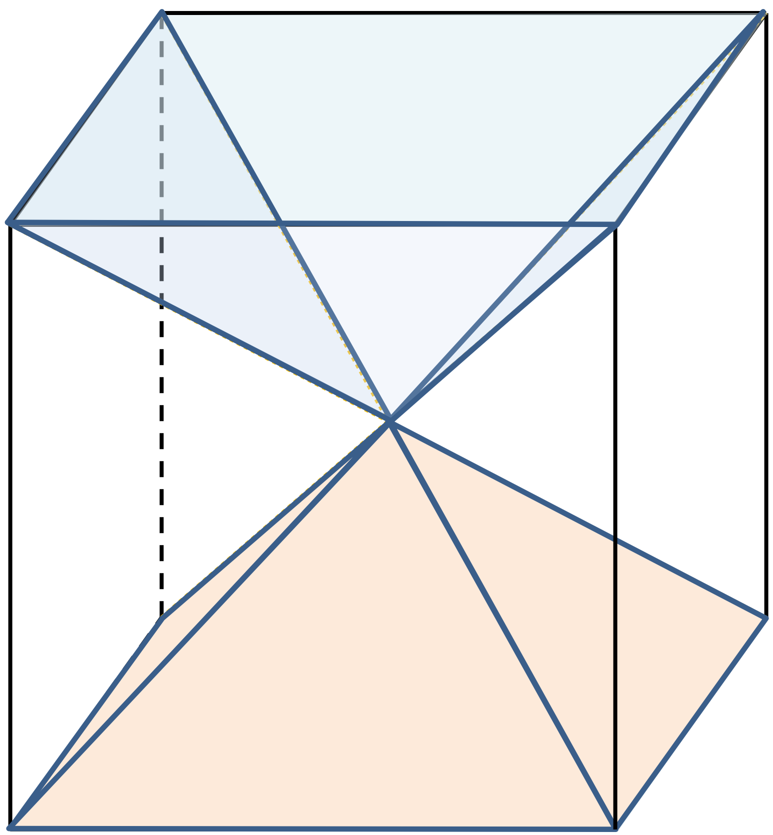
Das Volumen einer Pyramide



Die vier Raumdiagonalen teilen einen Würfel mit der Kantenlänge a in sechs Pyramiden. Jede Pyramide hat eine der 6 Würfelflächen als Grundfläche.

Alle sechs Pyramiden haben die gleiche Grundfläche $G = a^2$,
die Höhe h mit der Länge $h = \frac{a}{2}$
und das gleiche Volumen.

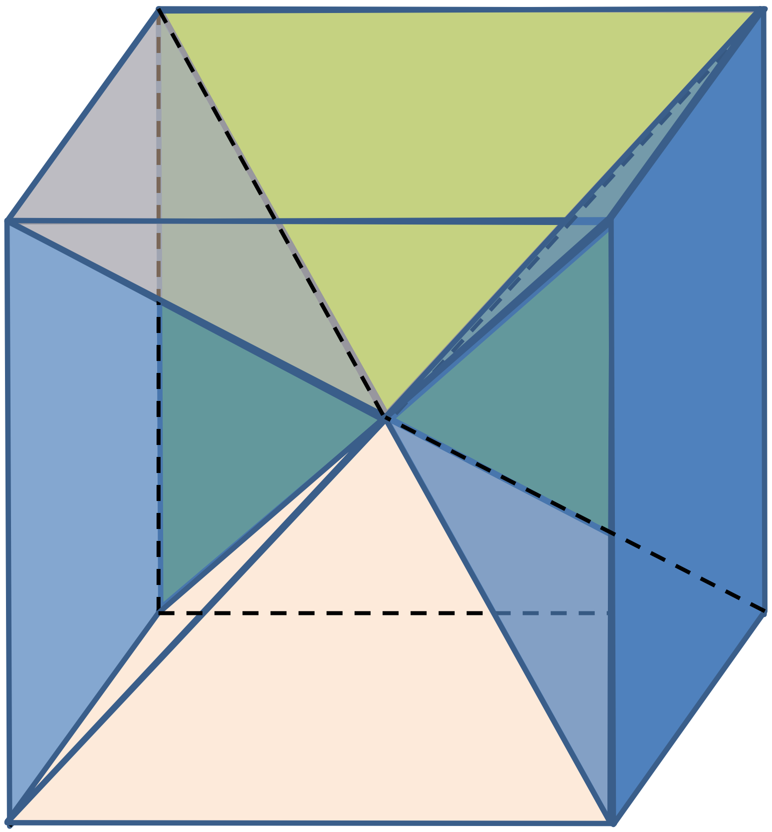
Vergleicht man das Volumen des Würfels mit dem Volumen einer dieser 6 Pyramiden, erkennt man, dass das Volumen einer Pyramide ein Sechstel des Volumens des Würfels beträgt.
Es gilt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} V_{\text{Würfel}}$$

oder umgekehrt

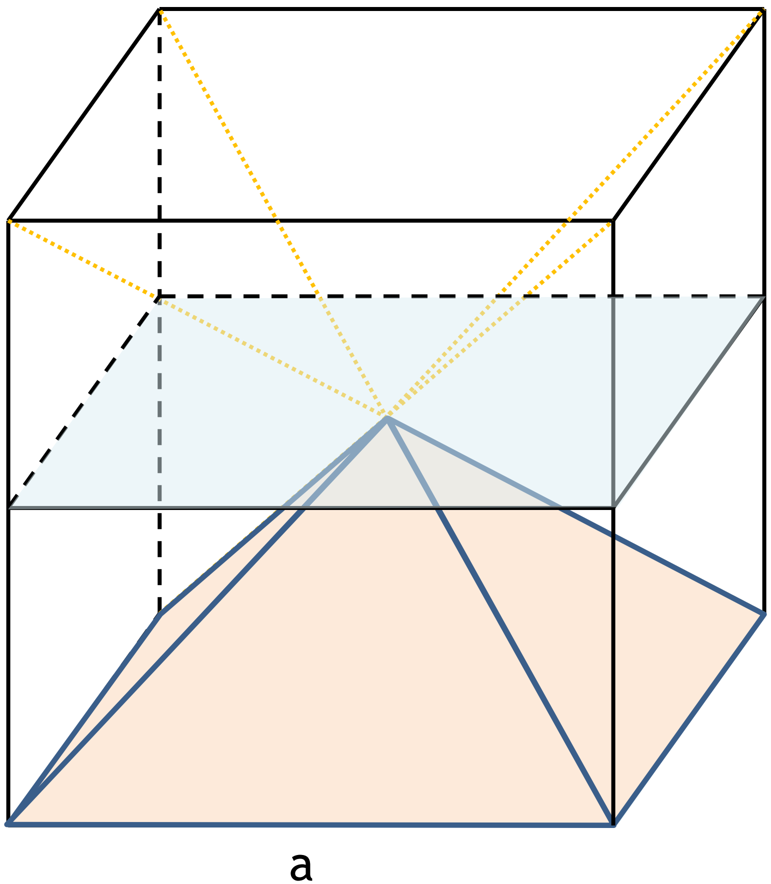
$$6 \cdot V_{\text{Pyramide}} = V_{\text{Würfel}}$$

Das Volumen einer Pyramide



Die Animation verdeutlicht die Entstehung der 6 volumengleichen Pyramiden.

Das Volumen einer Pyramide



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{6} V_{Würfe}$$

$$6 \cdot V_{Pyramide} = V_{Würfel}$$

$$3 \cdot V_{Pyramide} = V_{Quader}$$

oder umgekehrt

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Quader}$$

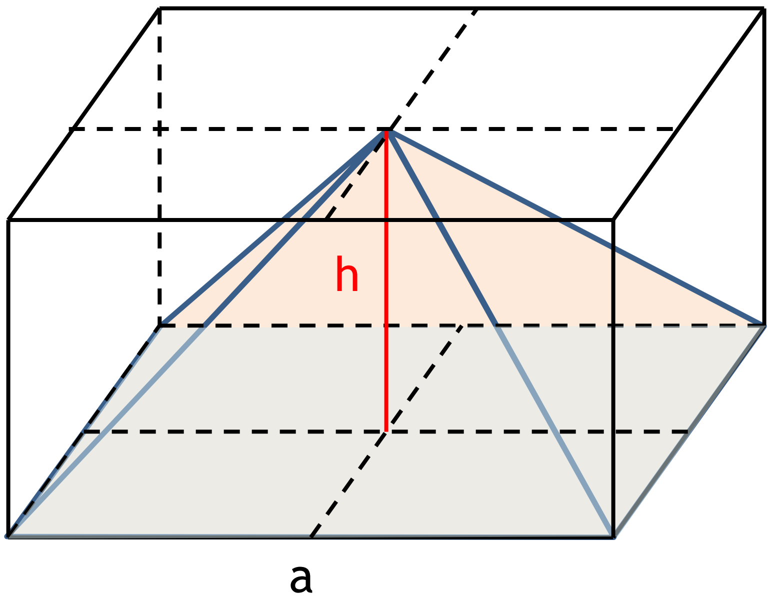
Halbiert man den Würfel, entstehen 2 Quader. Die Schnittfläche halbiert sowohl das Volumen des Würfels als auch das Volumen von 4 Pyramiden.
In den Quader passen noch 3 dieser Pyramiden

Das Volumen einer Pyramide

Sonderfall:

In unserem Beispiel ist die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat, die Spitze liegt über der Mitte des Quadrates und die Höhe der Pyramide ist halb so lang wie die Grundkante.

Für diese gerade quadratische Pyramide gilt:



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Quader}$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Das Volumen einer Pyramide

Für einen Sonderfall wurde gezeigt, dass das Volumen einer Pyramide genau ein Drittel
des dazugehörigen Prismas beträgt. Einen mathematischen Beweis, dass dieser Zusammen-
hang für jede Pyramide, unabhängig von der Form ihrer Grundfläche G gilt, findet man
im Internet z.B. hier.

Zusammenfassung:

Haben ein Prisma und eine Pyramide die gleiche Grundfläche und die gleiche Körperhöhe,
dann beträgt das Volumen der Pyramide $\frac{1}{3}$ des Volumens des Prismas.

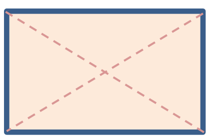
Volumenformel für ein Prisma: $V = G \cdot h$

Volumenformel für eine Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

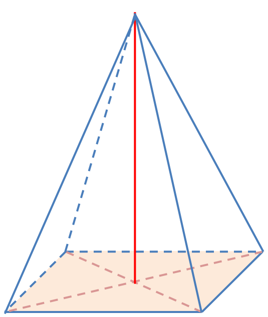
Die Volumenformeln regelmäßiger Pyramiden

Beispiele: Die Grundfläche der Pyramide ist …

.. ein Rechteck

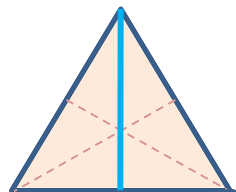


$G = a \cdot b$

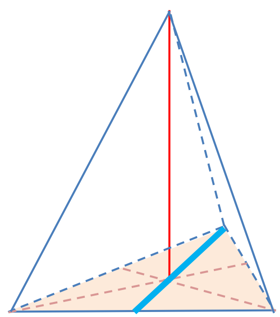


$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

..ein Dreieck



$G = \frac{1}{2} \cdot a \, h_a$

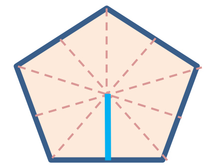


$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

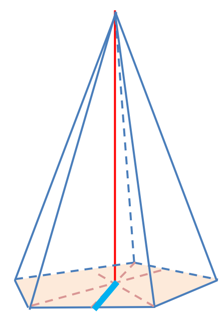
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \, h$

$V = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

..ein Fünfeck

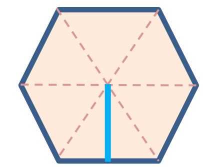


$G = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$



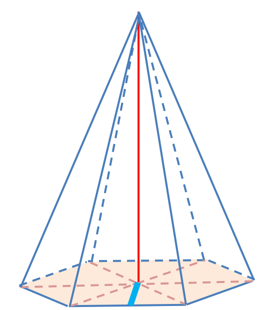
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

..ein Sechseck



$G = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

$G = 3 \cdot \quad \cdot a \cdot h_a$



$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \, 3 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot h$

$V = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot h$